

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO
MESTRADO EM ECONOMIA MONETÁRIA E FINANCEIRA

MODELOS DE RISCO DE TAXA DE JURO:
ESTRATÉGIAS DE COBERTURA E IMUNIZAÇÃO

JORGE MIGUEL VENTURA BRAVO

Orientador: Doutor Carlos Manuel Pereira da Silva

Júri:

Presidente: Doutor Carlos Manuel Pereira da Silva

Vogais: Doutor João Luís Correia Duque

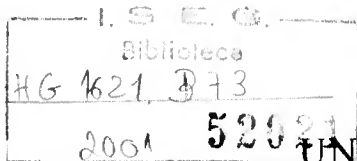
Doutor João Pedro Vidal Nunes

OUTUBRO / 2001

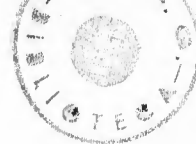
ERRATA



Na pág.	Linha	Onde se lê:	Deve ler-se:
31	Equação (3.2)	$f(t,T) \cong -\frac{\log P(0,T) - \log P(0,t)}{T-t}$	$f(0,t,T) = -\frac{\log P(0,T) - \log P(0,t)}{T-t}$
31	Equação (3.3)	$f(t,T) = i(0,t) + t \frac{\partial i(0,t)}{\partial t}$	$f(0,t) = i(0,t) + t \frac{\partial i(0,t)}{\partial t}$
59	2	O valor capitalizado dessa carteira no momento H ...	O valor capitalizado da carteira (se não existirem choques no intervalo $t \in (0,H)$)...
64	5	... usamos a um exemplo usamos um exemplo ...
65	9	... caso particular da estratégia caso particular da estratégia de minimização da variância ...
65	Nota p.p. (76)	... even thogh even though ...
84	Nota p.p. (120)	... a EPTJ é posta em evidência a EPTJ são postas em evidência ...
93	2	metodologia empregada	metodologia aplicada
100	Equação (6.1)	$A_j = \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j G(t)}{dt^j} \right]_{t=0}$	$A_j = \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j i(t)}{dt^j} \right]_{t=0}$
107	18	... a e medida do risco e a medida de risco ...
130	Equação (7.35)	$- D_N(i_0) \ \tilde{N}\ \leq D_N(i_0) \leq D_N(i_0) \ \tilde{N}\ $	$- D(i_0) \ \tilde{N}\ \leq D_N(i_0) \leq D(i_0) \ \tilde{N}\ $
130	Nota p.p. (191)	... no capítulo 5.	... no capítulo 6.
149	Nota p.p. (235)	A multiplicação de (7.65) ...	A multiplicação de (7.66) ...
160	Nota p.p. (253)	... de uma obrigações de cupão zero de uma obrigação de cupão zero ...
161	Nota p.p. (254)	$d_1 = \frac{\ln[P(t,T)/P(t,\tau) \cdot E] + V/2}{\sqrt{V}}$	$d_1 = \frac{\ln[P(t,T)/(P(t,\tau) \cdot E)] + V/2}{\sqrt{V}}$
171	Nota p.p. (275)	... demonstrar superioridade demonstrar a superioridade ...
173	14	... considera com pontos considera como pontos ...
181	14	... para que medida para que a medida ...
185	Nota p.p. (292)	... preços de obrigação os preços de obrigações ...
187	3	... no preço seu preço no seu preço ...
189	1	... no entender Jarrow no entender de Jarrow ...
208	1	... sem risco e uma acção (ou obrigação, se estivermos no contexto de estratégias de investimento obrigacionista).	... sem risco e uma opção de compra.
209	12	... noção ao um contexto noção num contexto ...
210	3	... nos últimos necessidade nos últimos anos necessidade ...
213	16	... medido em anos medido em dias ...
213	Nota p.p. (336)	$VaR = -P_0(\mu T - z_{1-\alpha} \times \sigma \sqrt{T})$	$VaR = P_0(\mu T - z_{1-\alpha} \times \sigma \sqrt{T})$
220	4	... onde μ_3 e μ_4 denotam o 3º e 4º momentos da aproximação $\Delta - \Gamma$ a ΔP onde ρ_3 e ρ_4 são indicadores do enviesamento e do achatamento da aproximação $\Delta - \Gamma$ a ΔP ...
244	8	... apenas uma valor apenas um valor ...
246	14	... usando do modelo usando o modelo ...
250	4	... seja aquela revela seja aquela que revela ...
255	14	... com a tipo com o tipo ...
256	10	... melhorar protecção melhorar a protecção ...
257	17	... exceptuarmos comportamento exceptuarmos o comportamento ...
262	21	... primeiros cinco elementos primeiros quatro elementos ...



X961245610



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

MESTRADO EM ECONOMIA MONETÁRIA E FINANCEIRA

**MODELOS DE RISCO DE TAXA DE JURO:
ESTRATÉGIAS DE COBERTURA E IMUNIZAÇÃO**

JORGE MIGUEL VENTURA BRAVO

Orientador: Doutor Carlos Manuel Pereira da Silva

Júri:

Presidente: Doutor Carlos Manuel Pereira da Silva

Vogais: Doutor João Luís Correia Duque

Doutor João Pedro Vidal Nunes

OUTUBRO / 2001

RESUMO

A gestão do risco de taxa de juro, que pode ser definida como uma técnica de protecção do valor nominal de uma carteira contra alterações inesperadas na estrutura por prazos das taxas de juro (EPTJ), conquistou inúmeros adeptos na comunidade académica e na indústria financeira nos últimos anos. Entre as soluções avançadas para identificar, medir e gerir este tipo de risco encontram-se, desde o primeiro momento, as estratégias de imunização e de cobertura. Os *modelos de imunização* (ou de *risco de taxa de juro*) controlam o risco através do uso de medidas de duração e convexidade. Estas medidas captam a sensibilidade dos retornos das obrigações às alterações em um ou mais factores de taxa de juro, sendo que a forma exacta destes factores depende de diferentes concepções sobre o modo como a EPTJ se desloca, de formulações distintas para a sua dinâmica, ou ainda de representações alternativas para a EPTJ.

O objectivo desta dissertação é o de fornecer uma revisão crítica, exaustiva e rigorosa dos principais modelos de risco de taxa de juro, neles se incluindo a metodologia *Value at Risk* (VAR). As limitações dos tradicionais modelos de duração imunizante são postas em relevo quando confrontadas com modelos de equilíbrio e de não arbitragem para a EPTJ, e com modelos independentes do processo estocástico. A aplicação destes modelos na condução de estratégias activas e passivas de gestão do risco de taxa de juro por instituições financeiras é demonstrada. A importância da convexidade no contexto da *visão tradicional* do fenómeno é reequacionada à luz de hipóteses menos restritivas (e consistentes com o equilíbrio) para o comportamento das taxas de juro, alertando-se, no contexto da *visão moderna*, para os potenciais riscos que decorrem da ligação da convexidade aos choques sobre a inclinação da EPTJ.

As vantagens dos modelos multifactor são justificadas pelo reforço da protecção contra choques não paralelos sobre a EPTJ. A superioridade empírica deste tipo de modelos no mercado português é demonstrada num teste ao desempenho do modelo *M-Vector*, considerando dados para o período compreendido entre Agosto de 1993 e Setembro de 1999. Concluimos, ainda, que o melhor modelo é aquele imuniza simultaneamente a carteira contra choques sobre o nível, choques sobre a inclinação e choques sobre a curvatura da EPTJ.

Palavras Chave: risco de taxa de juro; imunização; duração; convexidade; curva de rendimentos; obrigações.

ABSTRACT

Interest rate risk management, which can be defined as the protection of portfolio's nominal value from unexpected changes in the term structure of interest rates, has attracted significant attention in the academic community and in the financial industry over the last years.

Immunization and hedging strategies can be found between the techniques that were proposed from the very beginning to identify, measure and manage this kind of risk. Immunization models (also known as interest rate risk models) control risk through duration and convexity measures. These measures capture the responsiveness of bond returns to changes in one or more interest rate factors, where the exact form of these factors depends on different frameworks about the way yield curve changes, about its dynamics, or on alternative specifications of the term structure.

This dissertation proposes to provide a critical, exhaustive and rigorous treatment of the most important interest rate risk models, including the innovative Value-at-Risk (VAR) methodology. Limitations of traditional immunizing duration models are put in front when compared to equilibrium or non-arbitrage models to the term structure, or when compared to stochastic process independent models. The use of these models in establishing active or passive strategies to manage interest rate risk in financial institutions is shown. The importance of convexity is revalued under less restrictive (consistent with equilibrium) assumptions for term structure behavior, pointing out the potential risks that may arise when the link between convexity and slope shifts in the yield curve is considered.

The advantages of multifactor models are justified by their superior protection against non-parallel term structure shifts. Their empirical superiority in the Portuguese market is proved in a test conducted to the performance of the M-Vector model, using data from August 1993 to September 1999. We also conclude that the best model is the one that simultaneously immunizes bond portfolios against level, slope and curvature term structure shifts.

Keywords: interest rate risk; immunization; duration; convexity; term structure; bonds.

ÍNDICE

Resumo	ii
Abstract	iii
Índice	iv
Índice de Figuras	xii
Índice de Quadros	xiii
Agradecimentos	xiv
 PARTE I - Introdução e Principais Conceitos	 16
 Capítulo 1 - Introdução	 16
 Capítulo 2 - Conceitos Básicos Sobre Obrigações de Taxa Fixa e Títulos	
Conexos.....	22
2.1. Definição e Modalidades de Obrigações	22
2.2. Princípios Gerais Sobre Avaliação de Obrigações	23
2.3. Principais Medidas de Retorno para uma Obrigação Clássica	25
2.3.1. Taxa de Cupão	25
2.3.2. Taxa de Juro Corrente	26
2.3.3. Taxa de Rendimento Actuarial	26
2.3.4. Taxa de Rendimento Realizado (ou Efectivo)	27
2.4. Tipologia dos Riscos Financeiros	28
 Capítulo 3 - Definição e Teorias Explicativas da Estrutura por Prazos das	
Taxas de Juro	30
3.1. Definição de Estrutura por Prazos das Taxas de Juro	30
3.2. Formas Alternativas de Representar a Estrutura por Prazos das Taxas	
de Juro: Taxas Spot, Taxas Forward e Taxa de Rendimento Actuarial	30
3.3. Teorias Explicativas da Estrutura por Prazos das Taxas de Juro	34
3.3.1. Teoria das Expectativas Puras ou Racionais	34
3.3.2. Teoria dos Prémios de Risco (ou de Liquidez)	36

3.3.3. Teorias Institucionais	37
3.3.3.1. Teoria da Segmentação dos Mercados	38
3.3.3.2. Teoria do Habitat Preferido	39
3.3.4. Modernas Teorias Explicativas	40

PARTE II - Modelos de Risco de Taxa de Juro para Activos com Cash

Flows Certos	41
---------------------------	----

Capítulo 4 – Modelos de Factor Único Dependentes do Processo

Estocástico	41
4.1. Modelo de Duração de Macaulay	41
4.1.1. Definição e Evolução Histórica do Conceito de Duração	41
4.1.2. A Duração de Macaulay Enquanto Medida do Risco de Taxa de Juro	45
4.1.3. Propriedades da Duração	46
4.1.4. Cálculo da Duração de uma Carteira	52
4.1.5. Estratégia de Imunização	53
4.1.6. Estratégia de Cobertura (Hedging) do Risco de Taxa de Juro	61
4.1.6.1. Hedging no Modelo de Duração de Macaulay	62
4.1.6.2. Estratégias Activas de Hedging: Estratégia Barbell-Bullet ...	66
4.1.7. Estratégias de Hedging na Presença de Custos de Transacção	69
4.1.7.1. Estratégias de Base Temporal	69
4.1.7.2. Estratégias Baseadas na Dimensão dos Choques Sobre os Factores de Risco	71
4.1.8. Aplicação do Modelo às Obrigações Denominadas em Moeda Estrangeira	71
4.1.9. Limitações do Modelo de Duração de Macaulay	74
4.2. Modelos de Duração Imunizante	75
4.2.1. Modelo de Duração Aditiva de Fisher e Weil	75
4.2.2. Modelo de Duração Multiplicativa de Bierwag	79
4.2.3. Modelos de Duração Log-Aditiva e Log-Multiplicativa de Khang	81
4.2.4. Limitações dos Modelos de Duração Imunizante	83

Capítulo 5 - Modelos de Factor Único Independentes do Processo

Estocástico	86
5.1. Modelo de Duração de Babbel	86
5.2. Modelo do M-Quadrado	88
5.2.1. Abordagem pelo Limite Inferior (Lower Bound Approach)	89
5.2.2. Derivação do Modelo a Partir de uma Expansão em Série de Taylor	93
5.3. Modelo do M-Absoluto	95
5.4. Modelo do Ñ de Balbás e Ibáñez	97

Capítulo 6 - Os Riscos Associados ao Fenómeno da Convexidade 99

6.1. Visão Tradicional da Convexidade	99
6.1.1. Definição e Cálculo da Convexidade	100
6.1.2. Propriedades e Determinantes da Convexidade	102
6.1.3. Valor da Convexidade e Implicações Para a Estratégia de Imunização	104
6.1.4. Estratégia de Cobertura do Risco de Taxa de Juro	106
6.2. Visão Moderna da Convexidade	107
6.2.1. Convexidade, Modelo M^2 e Modelos Multifactor para a Estrutura por Prazos das Taxas de Juro	108
6.2.2. Convexidade e Valor Temporal	110

Capítulo 7 - Modelos Multifactor Independentes do Processo Estocástico 113

7.1. Modelo de Cooper	113
7.2. Modelo do Vector de Duração	115
7.2.1. Especificação Funcional do Modelo	115
7.2.2. Estratégia de Imunização e Indexação	117
7.2.3. Cálculo da Sensibilidade Taxa de Juro para as Medidas de Duração	119
7.2.4. Aplicações do Modelo	120
7.2.4.1. Contratos de Futuros sobre Obrigações de Cupão Zero	121
7.2.4.2. Contratos de Futuros sobre Obrigações Clássicas	122

7.2.5. Principais Limitações do Modelo	123
7.3. Modelos de Duração Direccional e de Duração Parcial	124
7.3.1. Modelo de Duração Direccional	125
7.3.2. Modelo de Duração Parcial	127
7.3.3. Propriedades dos Modelos	129
7.3.4. Representação dos Choques de Taxa de Juro por um Equivalente Paralelo	130
7.3.5. Estratégia de Imunização Direccional e Não Direccional	133
7.4. Modelo de “Key-Rate Durations” e “Key-Rate Convexities”	135
7.5. Modelo M-Vector	139
7.6. Modelo de Imunização Paramétrica de Nelson e Siegel	142
7.6.1. Especificação do Modelo para a Estrutura por Prazos das Taxas de Juro	142
7.6.2. Estratégia de Imunização Paramétrica	145
7.7. Modelo de Imunização Factorial	147

PARTE III - Modelos de Risco de Taxa de Juro para Activos com Cash

Flows Incertos	151
-----------------------------	------------

Capítulo 8- Modelos de Equilíbrio para a Estrutura por Prazos das Taxas de Juro

de Juro	155
8.1. Modelos de Arbitragem com Base Numa Única Variável de Estado	156
8.1.1. Condições de Arbitragem e Equação Fundamental para o Preço das Obrigações	156
8.1.2. Processo Estocástico Seguido pelas Taxas de Juro	158
8.1.2.1. Modelo de Merton	159
- Vector de Duração Para Opções Sobre Obrigações	160
- Vector de Duração Para Obrigações com Opção de Compra Incorporada	163
8.1.2.2. Modelo de Vasicek	165
8.1.2.3. Modelo de Cox, Ingersoll e Ross	169

8.1.2.4. Reformulação de Wu Para as Durações Estocásticas de Vasicek e CIR	171
8.2. Modelos de Arbitragem com Base em Múltiplas Variáveis de Estado	172
8.2.1. Modelo de Brennan e Schwartz	173
8.2.2. Modelo de Nelson e Schaefer	175
8.2.3. Modelo de Schaefer e Schwartz	175
8.2.4. Modelo de Fong e Vasicek	176
8.2.5. Modelo de Longstaff e Schwartz	177
8.2.6. Modelo de Kraus e Smith	178
8.2.7. Modelo de Chen e Modelo de Balduzzi, Das, Foresi e Sundaram	179
 Capítulo 9 - Modelos de Não Arbitragem para a Estrutura por Prazos das Taxas de Juro	
9.1. Modelo de Ho e Lee	180
9.2. Modelo de Hull e White	182
9.3. Modelo de Heath, Jarrow e Morton	183
9.3.1. Especificação do Modelo	184
9.3.2. Medidas de Risco de Taxa de Juro	187
9.3.3. Aplicação do Modelo à Estratégia de Imunização	188
9.4. Modelo de Black, Derman e Toy	189
9.5. Modelo de Black e Karasinski	191
9.6. Modelos de Mercado	192
 PARTE IV- Modelos de Risco de Taxa de Juro para Instituições Financeiras	
Financeiras	193
 Capítulo 10 - Estratégias de Investimento e Cobertura do Risco de Taxa de Juro para Instituições Financeiras	
10.1. Estratégias Passivas de Gestão do Risco de Taxa de Juro	194
10.1.1. Estratégia de Dedicção ou de Cash Flow Matching	194

10.1.2. Estratégia de Indexação	196
10.1.3. Estratégia de Imunização do Balanço	197
10.1.3.1. Modelo de Imunização de Redington	198
10.1.3.2. Outros Modelos de Imunização do Balanço	200
10.2. Estratégias Activas de Gestão do Risco de Taxa de Juro	202
10.2.1. Estratégia de Antecipação de Movimentos de Taxa de Juro	202
10.2.2. Estratégia de Maximização do Retorno com Risco Controlado	203
10.2.3. Estratégia de Imunização Contingente	204
10.2.4. Estratégia de Duration Targeting	205
10.2.5. Estratégia de Imunização Dinâmica	206
10.2.6. Técnica de Seguro da Carteira	207
10.2.7. Estratégia de Duração Total e Efeito Diversificação	208
10.3. Metodologia Value at Risk	210
10.3.1. Value at Risk (VAR): Definição e Importância do Conceito	210
10.3.2. Métodos de Cálculo do Value at Risk	212
10.3.2.1. Métodos Paramétricos	213
- Método Delta-Normal	216
- Método Delta-Gamma Normal	217
- Método Delta-Gamma Normal de Wilson	218
- Métodos Baseados na Correção dos Momentos da Distribuição	219
- Métodos Baseados na Convergência dos Momentos da Distribuição	220
10.3.2.2. Método de Simulação Histórica	221
10.3.2.3. Método de Simulação de Monte Carlo	225
10.3.2.4. Método de Análise de Cenários (<i>Stress Testing Method</i>) ...	226
10.3.3. Limitações da Metodologia Value at Risk	227

PARTE V - Evidência Empírica Sobre o Desempenho de Modelos

Multifactor: Uma Aplicação ao Mercado Português	229
Capítulo 11 - Testes de Imunização Considerando o Modelo M-Vector	229
11.1. Âmbito e Finalidade do Estudo Empírico	229
11.2. Caracterização do Comportamento das Taxas de Juro	230
11.2.1. Enquadramento Geral	230
11.2.2. Perfis de Volatilidade e Correlação Para os Choques de Taxa de Juro	231
11.2.3. Decomposição dos Choques de Taxa de Juro	233
11.2.4. Dinâmica dos Choques de Taxa de Juro	238
11.3. Descrição da Amostra de Obrigações do Tesouro (OT's)	243
11.4. Metodologia de Construção dos Testes de Imunização	245
11.4.1. Critérios Subjacentes à Delimitação do Horizonte Temporal de Investimento e da Periodicidade de Reajustamento da Carteira	245
11.4.2. Definição das Estratégias de Imunização com Base no Modelo <i>M-Vector</i>	246
11.4.3. Estratégias de Controlo	247
11.4.4. Indicadores de Desempenho	249
11.5. Análise dos Resultados	251
11.6. Comparação com Estudos Anteriores	259
Capítulo 12 - Conclusão	264
Bibliografia	267
ANEXOS	298
ANEXO 1 - Metodologia Geral da Estratégia de Cobertura (<i>Hedging</i>)	299
ANEXO 2 - Derivação do Modelo do Vector de Duração	302
ANEXO 3 - Breve Descrição da Metodologia dos Componentes Principais	303
ANEXO 4 - Raciocínio de Arbitragem e Equação Diferencial Fundamental para o Preço das Obrigações	305

ANEXO 5 - Segmentação dos Resultados da Estimação da Equação de Nelson-Siegel-Svensson por Nível de β_0	309
ANEXO 6 - Características Técnicas das Obrigações do Tesouro (OT's) Utilizadas no Estudo Empírico	311
ANEXO 7 - Principais Resultados dos Testes de Imunização Considerando Reajustamentos Semestrais	312
ANEXO 8A - Volatilidade (Medida pelo RMSD) das Estratégias ao Longo do HTI	313
ANEXO 8B - Volatilidade (Medida pelo RFRM) das Estratégias ao Longo do HTI	314
ANEXO 9 - Rendibilidade Relativa (Medida pelo Desvio Médio Face à TRE) das Estratégias ao Longo do HTI	315

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 7.1: Interpolação Linear de um Choque de Taxa de Juro	136
Figura 11.1: Evolução das Taxas de Juro no Período da Amostra	231
Figura 11.2: Evolução da Volatilidade das Taxas de Juro	232
Figura 11.3: Evolução da Inclinação da Curva de Rendimentos	234
Figura 11.4: Estruturas por Prazos de Taxa de Juro Representativas	235
Figura 11.5: Representação dos Três Componentes Principais	237
Figura 11.6: Volatilidade das Estratégias de Investimento ao Longo do HTI	258

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 4.1: Determinantes da Duração de Macaulay	47
Quadro 4.2: Duração da Carteira, HTI, e Riscos de Preço e Reinvestimento	56
Quadro 4.3: Elementos Necessários à Implementação da Estratégia Barbell Bullet	66
Quadro 7.1: Sensibilidade Taxa de Juro das Medidas de Duração	120
Quadro 8.1: Processos Estocásticos para a Taxa de Juro de Curto Prazo	159
Quadro 8.2: Modelos de Equilíbrio Multifactor para a EPTJ	174
Quadro 9.1: Especificações de Volatilidade no Modelo de HJM	186
Quadro 9.2: Medidas de Duração no Modelo de HJM	187
Quadro 10.1: Medidas de Risco de Taxa de Juro para Instituições Financeiras	201
Quadro 11.1: Correlação Entre as Variações nas Taxas de Juro	232
Quadro 11.2: Importância Relativa dos Vários Factores para cada Prazo	236
Quadro 11.3: Resultados da Estimação da Equação de Nelson-Siegel-Svensson	239
Quadro 11.4: Matriz de Correlação Entre os Choques Sobre o Nível, Inclinação, e Curvatura da EPTJ	240
Quadro 11.5: Características das Estratégias de Imunização Multifactor	247
Quadro 11.6: Principais Resultados dos Testes de Imunização Considerando Reajustamentos Anuais	252
Quadro 11.7: Risco dos Modelos de Imunização face à Estratégia de Maturidade	253
Quadro 11.8: Risco dos Modelos de Imunização de Factor Único face ao Modelo Multifactor	254
Quadro 11.9: Dimensão Óptima do Modelo M-Vector	255
Quadro 11.10: Ranking dos Melhores Modelos de Imunização	256
Quadro 11.11: Ganhos das Estratégias M-Bullet/M-Barbell face a M(1)	256
Quadro 11.12: Consequências do Aumento da Periodicidade de Reajustamento	258
Quadro 11.13: Resumo da Metodologia Usada nos Principais Estudos Empíricos de Imunização	260

AGRADECIMENTOS

Aqueles que tiverem a paciência de ler na íntegra este trabalho rapidamente se interrogarão sobre a possibilidade de ele ter sido obra de uma única pessoa. A resposta a essa questão é simples: obviamente que não é. Das mais variadas formas, muitas pessoas contribuíram para que este *barco chegasse a bom porto*. Tentarei, por isso, não me esquecer de ninguém nesta hora de agradecer a enorme ajuda que me prestaram.

Em primeiro lugar ao Professor Carlos Manuel Pereira da Silva, orientador deste trabalho, que respeitando, desde o início, as minhas opções e pontos de vista contribuiu com os seus sábios ensinamentos e sugestões para que a trajectória seguida não se afastasse do objectivo traçado. É óbvio que todos os erros ou emissões que no resultado final subsistem são da minha inteira responsabilidade.

Aos meus pais, José e Luísa, e aos meus irmãos, Luís e Ruben, agradeço eternamente todo o apoio e incentivo que me deram para abraçar mais este difícil projecto, proporcionando-me todas as condições ao seu alcance para que a sua realização fosse possível. Foram eles, juntamente com minha companheira Anita, que mais sofreram com a minha dedicação a esta causa. A todos eles dedico este trabalho. Espero que o futuro me permita compensá-los de alguma forma por esta ausência prolongada.

A extensa recolha bibliográfica não teria sido possível sem a ajuda do casal Ramalho que, temporariamente emigrado no Reino Unido, me permitiu aceder a alguns verdadeiros *achados*, dos professores R. Reitano, L. Svensson e P. Dybvig, da D. Antónia - da Biblioteca Geral da Universidade de Évora – e do Jorge – da Biblioteca

Francisco Pereira de Moura no ISEG.

A obtenção dos preciosos dados de taxa de juro é devida à generosidade do Dr. Jorge Barros Luís. À Dr^a Ana Sampaio - da CMVM – devo a obtenção dos dados sobre as OT's. A Anita merece um reconhecimento adicional pela leitura atenta que fez do trabalho, corrigindo as inevitáveis gralhas.

No Departamento de Economia da Universidade de Évora, quero agradecer aos meus colegas da cadeira de Introdução à Economia I&II pelo apoio concedido e pelas *dobras* prestadas em alguns momentos importantes. Nesta mesma escola não posso deixar de agradecer o entusiasmo dos meus alunos. Os meus amigos merecem uma palavra de apreço pela compreensão que manifestaram quando faltava, repetidamente, às *convocatórias*. Prometo desforrar-me.

A nota final é para mim. Espero um dia conseguir fazer trabalhos que exijam ...menos trabalho.

I – Introdução e Principais Conceitos

1. Introdução

A gestão do risco de taxa de juro, que pode ser definida como uma técnica de protecção do valor nominal de uma carteira contra alterações inesperadas na estrutura por prazos das taxas de juro, conquistou inúmeros adeptos na comunidade académica e na indústria financeira nos últimos anos. Duas razões justificam, em nosso entender, este interesse redobrado. A primeira, pragmática, reflecte tão só o facto do risco de taxa de juro constituir uma das principais fontes de risco financeiro com que se defrontam, diariamente, os gestores de carteira. A segunda, mais profunda, está relacionada com o aumento significativo da volatilidade nos mercados e a evidência, frustrante, de que as taxas de juro não podem ser previstas com suficiente precisão e consistência para que sobre elas se possam construir, sistematicamente, estratégias ganhadoras.

Movidos por esta preocupação acrescida, os vários participantes nos mercados – incluindo companhias de seguros, instituições bancárias e fundos de pensões – concentraram os seus esforços no desenvolvimento e implementação de soluções de identificação, medição e gestão do risco de taxa de juro cada vez mais sofisticadas e eficazes. Entre essas soluções encontram-se, desde o primeiro momento, as estratégias de imunização e de cobertura.¹

(1) Apesar das estratégias de imunização e cobertura usando modelos de duração terem merecido uma atenção especial na literatura académica, existem outros métodos de controlo do risco de taxa de juro. Entre os principais destacamos a adopção de técnicas de cobertura usando derivados de taxa de juro (opções sobre obrigações, futuros de taxa de juro, swaps de taxa de juro), a prossecução de estratégias activas (imunização contingente, técnica de seguro da carteira, etc.) e passivas (estratégia de dedicação, indexação, etc.) de gestão, e o recurso a activos especiais como as obrigações de cupão zero ou as obrigações de taxa variável. A Teoria da Arbitragem pelos Preços providencia uma solução alternativa para controlar o risco de taxa de juro ao minimizar a variância do retorno das carteiras obrigacionistas.

A *estratégia de imunização* compreende o conjunto dos procedimentos de construção e gestão de uma carteira de obrigações (ou de um conjunto de activos e passivos) que possibilita a protecção do investimento contra o risco de modificações nas taxas de juro, durante um determinado horizonte temporal. Por protecção entenda-se a necessidade de assegurar que o valor da carteira atinge um determinado objectivo: replica o comportamento de um índice do mercado obrigacionista, garante o pagamento das responsabilidades futuras, ou gera um determinado retorno. A *estratégia de cobertura* com base em modelos de duração tem preocupações mais imediatistas e visa minimizar (se possível eliminar) as flutuações do valor da carteira nos mercados à vista.

Os modelos de imunização² (tanto os mais simples como os mais sofisticados) controlam o risco de taxa de juro através do uso de medidas de duração e convexidade. Estas medidas captam a sensibilidade (de primeira e segunda ordem, respectivamente) dos retornos das obrigações às alterações em um ou mais factores de taxa de juro, sendo que a forma exacta destes factores depende de diferentes concepções sobre o modo como a estrutura por prazos das taxas de juro (EPTJ) se desloca, de formulações distintas para a dinâmica das taxas de juro, ou ainda de representações alternativas para a EPTJ e para os choques de taxa de juro.³

O uso de especificações alternativas para o factor ou factores conduz-nos à obtenção, quer de definições alternativas para as medidas de duração e convexidade, quer das

(2) Também designados por modelos de risco de taxa de juro.

(3) Por exemplo, o factor pode ser uma alteração na taxa de rendimento actuarial da obrigação (e.g., modelo de Macaulay (1938)), uma alteração paralela na EPTJ (e.g., modelo de Fisher e Weil (1971)), uma alteração na taxa de juro de curto ou longo prazo (e.g., modelo de Brennan e Schwartz (1979)), uma alteração nos parâmetros de nível, inclinação ou curvatura da EPTJ (e.g., modelo do vector de duração, modelo de Nelson e Siegel (1987), modelo M-Vector), uma alteração num componente principal ou factor (e.g., modelo de imunização factorial), etc.

mesmas definições em contextos completamente opostos de representação da EPTJ e sua dinâmica.⁴ Esta diversidade não impede, todavia, que o princípio da imunização se mantenha e possa ser aplicado igualando as durações da carteira e do activo alvo a ser replicado, verificadas determinadas condições de segunda ordem (ou de convexidade). A inclusão de mais do que um factor concede uma natureza multivariada ao problema de imunização e reforça a protecção face a choques não paralelos sobre a EPTJ.

Noutro contexto, a consideração de modelos dependentes do processo estocástico que governa as taxas de juro, i.e., de modelos que determinam à partida a forma e a direcção que os choques sobre os factores podem tomar, levanta duas questões fundamentais: (i) os modelos sujeitam o investidor a uma fonte de risco adicional para além do risco de taxa de juro – *risco de processo estocástico* –, na medida em que apenas imunizam numa determinada “direcção”; (ii) os modelos são inconsistentes com as condições de equilíbrio nos mercados.

Em resposta a estas deficiências foram propostos modelos de equilíbrio dependentes do processo estocástico, teoricamente mais fundamentados mas incapazes de superar em termos de performance os modelos mais simples, e modelos de risco de taxa de juro independentes do processo estocástico, que asseguram a consistência com o equilíbrio e proporcionam ganhos importantes em termos de eficácia da estratégia de imunização.

(⁴) Por exemplo, no contexto dos modelos de factor único dependentes do processo estocástico o factor apropriado para a medida de duração definida por Fisher e Weil (1971) é um choque paralelo sobre a EPTJ. A mesma definição de duração pode ser obtida, quer no contexto de modelos multifactor independentes do processo estocástico, considerando que o factor apropriado é um choque sobre o parâmetro de nível da representação da EPTJ (e.g., modelo de Cooper (1977), modelo do vector de duração e modelo de Nelson e Siegel (1987)), quer no contexto de modelos de equilíbrio (e.g., modelos de Merton (1973) e Dothan (1978)) e de não arbitragem para a EPTJ (e.g., modelo de Ho e Lee (1986)) considerando que a volatilidade do processo estocástico é constante.

O objectivo desta dissertação é o de fornecer uma revisão actualizada, crítica, sistemática, exhaustiva e rigorosa dos principais modelos de risco de taxa de juro apresentados na literatura, lançando em simultâneo algumas pistas para a sua implementação prática na prossecução de estratégias de cobertura e imunização. Em adição fornecemos evidência empírica importante sobre o desempenho de modelos de imunização multifactor no mercado obrigacionista português conduzindo, em concreto, um teste ao desempenho do modelo *M-Vector*.

A dissertação encontra-se estruturada em cinco partes distintas, compreendendo um total de doze capítulos. Na **Parte I** fazemos, para além desta breve introdução ao trabalho, no **capítulo 2** uma apresentação sumária de alguns conceitos que consideramos imprescindíveis a uma perfeita compreensão das características de risco e retorno de obrigações de taxa fixa e títulos conexos, e no **capítulo 3** uma súmula das principais teorias explicativas da estrutura por prazos das taxas de juro.

A **Parte II** é inteiramente dedicada ao estudo de modelos de risco de taxa de juro que têm como campo de análise preferencial activos financeiros que libertam cash flows certos. No **capítulo 4** são avaliadas as potencialidades e as limitações dos tradicionais *modelos de factor único dependentes do processo estocástico*, também conhecidos por modelos de duração imunizante. Relevo especial será concedido, neste ponto, ao popular modelo de Macaulay, explorando em detalhe as propriedades da medida de risco de taxa de juro, introduzindo os fundamentos das estratégias de imunização e de cobertura, e avançando com uma aplicação importante no contexto de obrigações denominadas em moeda estrangeira.

No capítulo 5 apresentamos modelos que, apesar de comportarem apenas uma fonte de incerteza, não dependem do processo estocástico seguido pelas taxas de juro e são, por isso, consistentes com as condições de equilíbrio nos mercados. Tratam-se de modelos que visam, na sua essência, reduzir o risco de processo estocástico e proporcionar ganhos em termos de eficácia na estratégia de imunização.

No capítulo 6 demonstramos que a *visão tradicional* do fenómeno da *convexidade* sustenta a sua desejabilidade (embora aceitando um preço) com base em hipóteses demasiado restritivas (e inconsistentes com o equilíbrio) para o comportamento das taxas de juro, nomeadamente que os choques são do tipo paralelo e não infinitesimal. A *visão moderna* do fenómeno, baseada em condições de equilíbrio, redefine o significado da convexidade e alerta para os potenciais riscos que decorrem da ligação do conceito aos choques sobre a inclinação da EPTJ.

No capítulo 7 apresentamos um naipe extremamente rico e diversificado de *modelos multifactor independentes do processo estocástico*, modelos que contribuem decisivamente para melhorar a qualidade da especificação do comportamento dinâmico das taxas de juro e para relaxar as restrições ao nível da estrutura de correlação. Os ganhos em termos de imunização contra choques não paralelos sobre a EPTJ são o seu principal cartão de visita. Os modelos diferenciam-se, grosso modo, no que diz respeito ao tipo de representação adoptada para a EPTJ: *representação paramétrica* (modelos de Cooper, do vector de duração, M-Vector, Nelson-Siegel) *vs* *representação discreta* (modelos de duração direcciona e de duração parcial, modelo de *key-rate durations* e *key-rate convexities*, e modelo de imunização factorial).

Na **Parte III** incluímos modelos especialmente indicados para analisar as características de risco de activos com fluxos monetários fortemente condicionados pela trajectória futura, incerta, das taxas de juro. No **capítulo 8** são abordados os chamados *modelos de equilíbrio* para a EPTJ, modelos que partem de hipóteses sobre o comportamento estocástico de uma ou mais variáveis de estado (fontes de incerteza), a partir das quais são derivados os preços de activos contingentes impondo restrições de não arbitragem. O **capítulo 9** é dedicado, por seu turno, a expor os mais importantes *modelos de não arbitragem*, modelos onde a dinâmica de toda a estrutura de taxas é definida de modo a torná-la automaticamente consistente com os dados de mercado.

A **Parte IV** é reservada à medição e gestão do risco de taxa de juro nas instituições financeiras. No **capítulo 10** descrevemos, de forma sintética, as principais estratégias de investimento e de cobertura ao dispor dos gestores, acentuando a distinção entre estratégias activas e estratégias passivas. Sublinhamos ainda a importância crescente do conceito de *Value at Risk* na quantificação e gestão do risco de mercado.

A **Parte V** é inteiramente dedicada à descrição dos contornos de um estudo pioneiro realizado ao desempenho de modelos de imunização multifactor (mais propriamente do modelo *M-Vector*) no mercado português. No **capítulo 11** efectuamos, num primeiro momento, a caracterização do comportamento das taxas de juro no período da amostra, tentando identificar factos estilizados sobre o número de factores relevantes e sua dinâmica. Em seguida descrevemos, em detalhe, a metodologia adoptada na simulação da estratégia. A análise dos principais resultados merece o destaque final, estabelecendo pontes com a evidência empírica já produzida. No **capítulo 12** apresentamos, por fim, as principais conclusões do trabalho.

2. Conceitos Básicos Sobre Obrigações de Taxa Fixa e Títulos Conexos

Introduzimos, neste capítulo, alguns conceitos imprescindíveis à análise das características de risco e retorno de obrigações de taxa fixa e títulos conexos.⁵

2.1. Definição e Modalidades de Obrigações

Uma obrigação pode definir-se, em termos genéricos, como um título de dívida, negociável, representativo de uma fracção de um empréstimo obrigacionista, através do qual a entidade emitente se compromete a pagar, ao seu detentor, um determinado rendimento periódico – o juro ou *cupão* –, e a reembolsar, na *data de vencimento* (*maturidade*), o valor do capital, nos termos das condições definidas à data da emissão.

As várias modalidades de obrigações distinguem-se, entre si, por um conjunto relativamente extenso de características: *tipo de emitente* (público, privado), *valor de subscrição* (acima/abaixo do par – *valor nominal* –, ao par), *taxa de cupão* (fixa, variável, indexada, ou nula), *periodicidade do cupão* (anual, semestral, etc.), *valor de reembolso* (acima/abaixo do par, ao par), *momento do reembolso* (na data de vencimento (*in fine*), periodicamente, quando o emitente (*call*) ou o obrigacionista (*put*) entenderem, nunca), *direitos atribuídos ao obrigacionista* (de compra (*warrants*) ou conversão em acções), *tipos de garantias* (garantia real ou colateral), *risco de crédito*, entre outras.

⁽⁵⁾ Para uma introdução mais pormenorizada a esta temática recomenda-se a leitura de Barreto (1991), Cruz (1995), e Fonseca (1999).

A modalidade sobre a qual incidiremos preferencialmente a nossa análise, que é também a mais comum, corresponde às denominadas *obrigações de taxa fixa* não revisível (*obrigações clássicas*). Estas caracterizam-se, em traços gerais, por manter a taxa de cupão durante toda a vida do empréstimo, por pagar juros periodicamente, e por não conferirem ao obrigacionista outros direitos que não sejam o de receber o valor dos cupões e o valor do capital (geralmente na data de vencimento).

2.2. Princípios Gerais Sobre Avaliação de Obrigações

O preço teórico (*fair price*) de uma obrigação (e de qualquer instrumento financeiro) é igual ao valor actual dos seus cash flows esperados. Em consequência, o seu valor é determinado pelos seguintes factores:

- i) Pela estimativa dos cash flows futuros da obrigação;
- ii) Pelo intervalo de tempo que medeia entre o momento actual e a data de pagamento de cada um desses cash flows, levando em linha de conta as convenções adoptadas na contagem do número de dias;
- iii) Pelo factor de desconto (ditado pelo mercado, ou pela taxa de juro exibida por um instrumento financeiro com risco comparável) usado na actualização dos pagamentos futuros.

Representemos por $B(i)$ o valor actual ($t = 0$) de uma obrigação clássica, que liberta cash flows c_t periodicamente, e por T a sua data de vencimento. No período $t = 1, \dots, T-1$ o valor de c_t corresponde simplesmente ao cupão c . No momento $t = T$, o cash flow da obrigação é igual à soma do (último) cupão com o valor de reembolso B_T . Se admitirmos, por simplificação, que a taxa de actualização i é idêntica

para todos os prazos, que o cálculo tem lugar numa data de pagamento de cupão, e que se considera o regime de capitalização discreta, o valor teórico de uma obrigação clássica é dado por:

$$B(i) = \sum_{t=1}^T c_t (1+i)^{-t} \quad (2.1)$$

Na maioria dos mercados desenvolvidos a cotação de uma obrigação em Bolsa (designada por *clean price*) não representa o verdadeiro valor teórico do título, uma vez que não incorpora os juros corridos desde a última data de pagamento de cupão. Os *juros corridos* constituem a compensação devida pelo comprador da obrigação ao seu vendedor pelo facto de este abdicar do próximo cupão, apesar de ter detido o título durante um determinado período após o vencimento do último cupão. Deste modo, numa aquisição em mercado secundário o valor efectivamente pago pelo comprador corresponde ao denominado *dirty price*, que não é mais do que o valor de cotação acrescido dos juros corridos.

As obrigações de cupão zero (*zero-coupon bonds*), OCZ, constituem um caso particular das obrigações clássicas na medida em que não existe qualquer pagamento durante toda a vida do empréstimo. Com efeito, para estes títulos o juro está implícito na diferença entre o preço de aquisição e o valor de venda (ou de reembolso, caso o investidor mantenha o título até à maturidade), pelo que as obrigações são emitidas por um valor inferior ao valor de reembolso (*a desconto*). O preço teórico de uma OCZ, $P(0,T)$, é calculado com base na seguinte expressão:

$$P(0,T) = \frac{Br}{(1+i)^T} \quad (2.2)$$

2.3. Principais Medidas de Retorno para uma Obrigação Clássica

O retorno esperado de um investimento em obrigações de taxa fixa tem origem em três fontes potenciais:

- i) No *cupão periódico* pago pelo emitente;
- ii) Nos *ganhos (ou perdas) de capital* resultantes da diferença entre o preço de aquisição da obrigação e o preço de venda (no caso de a obrigação ser alienada antes da data de vencimento) ou de reembolso (na eventualidade de a obrigação ser mantida em carteira até à data da amortização final);
- iii) E nos juros proporcionados pelo *reinvestimento dos cupões*.

Várias medidas são regularmente usadas para medir o retorno de um investimento em obrigações de taxa fixa, considerando algumas (ou todas) as potenciais fontes de rentabilidade acima enunciadas. Apresentamos, em seguida, alguns desses indicadores.

2.3.1. Taxa de Cupão

A taxa de cupão (*coupon rate*) corresponde à taxa de juro que é contratualizada no momento da emissão das obrigações. Possibilita, quando multiplicada pelo respectivo valor nominal, a determinação do juro periódico a receber pelo investidor.

A taxa de cupão não constitui um indicador adequado da rentabilidade do investimento, mesmo nos casos em que a obrigação é adquirida por um valor igual ao valor nominal. Tal é assim porquanto esta não reconhece, nem os potenciais ganhos (ou perdas) de capital, nem os juros provenientes do reinvestimento dos cupões.

2.3.2. Taxa de Juro Corrente

A *taxa de juro corrente* (TRC), também conhecida por *taxa de juro aparente* ou *current yield*, estabelece a relação entre o valor do cupão da obrigação e o seu preço de mercado:

$$TRC = \frac{c}{B(i)} \quad (2.3)$$

A TRC é maior do que a taxa de cupão quando a obrigação é negociada abaixo do valor nominal (*a desconto*), e menor do que esta quando a obrigação é transaccionada por um preço superior ao valor nominal (*a prémio*). À semelhança da taxa de cupão, a TRC fornece uma medida enviesada do retorno de um investimento obrigacionista, na medida em que ignora duas das suas principais fontes de rendimento: os ganhos de capital, e os juros gerados pelo reinvestimento dos cupões.⁶

2.3.3. Taxa de Rendimento Actuarial

A *taxa de rendimento actuarial* (TRA), também conhecida na literatura por *yield to maturity*, é definida como a taxa de desconto que iguala o valor actual dos cash flows de uma obrigação ao seu preço de mercado. Para uma obrigação de cupão fixo e reembolso “*in fine*”, que paga anualmente um cupão durante T anos, a TRA (que designamos por i) é calculada resolvendo a seguinte equação:

$$B(i) = \sum_{t=1}^T \frac{c_t}{(1+i)^t} + \frac{B_T}{(1+i)^T} \quad (2.4)$$

⁽⁶⁾ Uma limitação adicional desta medida prende-se com o facto de esta não poder ser aplicada a obrigações de cupão zero.

A TRA constitui uma medida mais adequada para a rendibilidade *esperada* de uma obrigação, uma vez que contempla todas as suas potenciais fontes de retorno. No entanto, para que esta possa ser considerada uma medida de retorno *efectivo* é necessário assumir alguns pressupostos: (i) que o investidor adquire a obrigação pelo preço actual e a mantém na sua posse até à maturidade, não a vendendo no mercado por um preço diferente do valor nominal; (ii) que todos os cupões e o valor de reembolso são pagos nas datas previstas e, por último, (iii) que todos os cash flows libertados são imediatamente reinvestidos à taxa dada pela TRA. Se algum destes pressupostos for violado, a taxa de retorno realizada diferirá da taxa de retorno esperada, i.e., da TRA.⁷

2.3.4. Taxa de Rendimento Realizado (ou Efectivo)

Para contornar a incerteza que a taxa à qual serão reinvestidos os cupões recebidos provoca no cálculo da rendibilidade efectiva de um investimento em obrigações, alguns autores sugerem o uso da chamada *taxa de rendimento realizado* (ou *efectivo*), TRR.⁸ O cálculo deste indicador processa-se da seguinte forma. Assumindo uma determinada taxa de reinvestimento calcula-se, em primeiro lugar, o valor capitalizado dos cupões esperados da obrigação. Em seguida, e com base em cenários adiantados para a evolução das taxas de juro, estima-se o valor de liquidação do título. A soma destas duas parcelas fornece o valor final do investimento (*VF*). O passo final consiste em determinar a taxa de juro à qual deveriam ser remunerados os capitais aplicados por forma a obter um determinado valor capitalizado, ou seja:⁹

(7) Acresce que, como veremos no capítulo 3, o conceito de TRA é desajustado para caracterizar a estrutura por prazos das taxa de juro (EPTJ).

(8) A TRR é também conhecida por *Total Return* ou *Holding-Period Return*.

(9) Adoptando o regime de juro composto e assumindo que a obrigação paga cupões anualmente.

$$TRR\% = \left[\sqrt[H]{\frac{VF}{B(i)}} - 1 \right] \times 100 \quad (2.5)$$

onde H representa o número de anos até ao final do horizonte de investimento.

2.4. Tipologia dos Riscos Financeiros

A noção de risco decorre da incerteza presente na economia. Embora o termo risco apareça normalmente associado à sensação de “perigo de perda”, a teoria financeira caracteriza o risco pela dispersão dos resultados esperados de um investimento (nos vários estados da natureza admissíveis), em consequência de movimentos nas variáveis financeiras (factores de risco).

O risco financeiro é claramente multidimensional. Compreende-se assim que um dos pré-requisitos indispensáveis a uma adequada estruturação dos investimentos passe, precisamente, pela identificação dos tipos de risco presentes numa determinada aplicação. Em termos gerais, existem seis grandes tipos de risco financeiro: risco de taxa de juro, risco de mercado accionista, risco cambial, risco de crédito, risco de liquidez, risco de inflação.¹⁰

O *risco de taxa de juro* manifesta-se pela volatilidade dos preços (*risco de preço*) dos activos financeiros em consequência de movimentos adversos, não apenas no nível geral das taxas de juro, mas também na configuração da EPTJ (choques sobre a inclinação, sobre

(¹⁰) Entre os principais tipos de risco encontram-se ainda: o risco de mercadoria, o risco político, o risco de reembolso antecipado, o risco de convertibilidade, o risco de volatilidade e correlação, o risco legal, o risco operacional, o risco de imposto, o risco contabilístico e o risco de pré-pagamento.

a curvatura, etc.). A variabilidade das taxas a que poderão ser reinvestidos os cash flows regularmente distribuídos pelos activos traduz uma segunda componente do risco de taxa de juro, o denominado *risco de reinvestimento*. O problema da medição e da gestão do risco de taxa de juro constitui a essência deste trabalho.

O *risco de mercado accionista* é um reflexo das oscilações verificadas no valor de mercado de acções e outros activos sucedâneos. Esta variabilidade é provocada, não apenas por alterações no desempenho das sociedades emitentes (*risco específico*), mas também modificações na performance do mercado em geral (*risco sistemático*).

O *risco cambial* aparece associado a movimentos nas cotações (em moeda nacional) das divisas em que estão denominados os vários activos e responsabilidades de um determinado investidor. O *risco de crédito* (de *incumprimento* ou de *insolvência*) decorre da possibilidade de um crédito concedido não ser atempadamente reembolsado pela entidade responsável.

O *risco de liquidez* é especialmente importante em carteiras de activos geridas de forma activa no mercado. Este tipo de risco manifesta-se, grosso modo, na incapacidade absoluta de mobilizar um activo financeiro, ou na necessidade de despendar elevados custos de transacção para o conseguir.¹¹ Por fim, o *risco de inflação* é uma consequência da perda de poder de compra da moeda em resultado de aumentos no nível de preços dos bens e serviços. Este risco é especialmente relevante para os activos que oferecem rendimentos fixos em termos nominais (por exemplo obrigações clássicas).

(¹¹) Os aumentos (diminuições) no grau de liquidez de um activo são visíveis, *ceteris paribus*, pela diminuição (aumento) do diferencial entre as ofertas de compra e venda listadas em bolsa. Comissões, taxas e impostos são outros dos factores que influenciam a liquidez do activo.

3. Definição e Teorias Explicativas da Estrutura por Prazos das Taxas de Juro

3.1. Definição de Estrutura por Prazos das Taxas de Juro

A análise do comportamento das taxas de juro ao longo do tempo assume, como vimos no capítulo anterior, um papel transcendental na avaliação da maioria dos activos financeiros. O sucesso desta tarefa depende, desde logo, da correcta identificação e acompanhamento dos principais determinantes das taxas de juro. Entre estes é comum encontrarmos variáveis como a taxa de juro real, as expectativas de inflação, as acções de política monetária, o ciclo económico, ou os défices orçamentais.

A juntar a estes determinantes, a evidência de que o tempo até à maturidade de um determinado instrumento financeiro contribui significativamente para a sua taxa de retorno foi o ponto de partida para o desenvolvimento do conceito de *Estrutura por Prazos das Taxas de Juro* (EPTJ).¹² A EPTJ pode ser definida como a relação que se estabelece, em cada momento do tempo, entre as taxas de juro implícitas nos preços de um conjunto homogéneo de activos financeiros e o seu respectivo tempo até à maturidade. Em equilíbrio, esta correspondência deve ser única.

3.2. Formas Alternativas de Representar a Estrutura por Prazos das Taxas de Juro: Taxas Spot, Taxas Forward e Taxa de Rendimento Actuarial

Existem diferentes formas de representar a EPTJ, sendo certo que nem todas elas traduzem de maneira adequada o conceito. Para melhor entendermos os argumentos desta discussão introduzimos, em primeiro lugar, os conceitos de taxa *spot* e de taxa

(¹²) O conceito de EPTJ é muitas vezes designado por *curva de rendimentos* (*yield curve*).

forward, e analisamos a relação que entre eles e a TRA das obrigações de cupão zero se estabelece. A taxa de juro *spot* (ou *à vista*) para um determinado prazo t , $i(0,t)$, pode ser definida como a TRA implícita no preço de mercado de uma obrigação de cupão zero com maturidade em t , $P(0,t)$. Pode ainda ser definida como a taxa de juro que prevalece num empréstimo a realizar hoje ($t=0$), que promete pagar 1 unidade monetária no momento t . Em termos formais, e adoptando o regime de capitalização contínua:

$$i(0,t) = -\frac{\log P(0,t)}{t} \quad (3.1)$$

O conceito de taxa de juro *forward* (ou *a prazo*) refere-se à taxa aplicável a um empréstimo contratado hoje, com início no momento t , que promete pagar 1 unidade monetária na data de vencimento T . Designemo-la por $f(t,T)$. A taxa *forward* pode ser calculada a partir da informação contida nos preços das obrigações de cupão zero que vencem em t e T , mediante aplicação da seguinte fórmula:

$$f(t,T) \cong -\frac{\log P(0,T) - \log P(0,t)}{T-t} \quad (3.2)$$

Ou, de forma equivalente, a partir das taxas de juro *spot*:¹³

$$f(t,T) = i(0,t) + t \frac{\partial i(0,t)}{\partial t} \quad (3.3)$$

(¹³) Note-se que a equação (3.3) traduz uma relação entre as taxas *spot* e *forward* que é similar à que se estabelece entre as noções de custo médio e custo marginal de produção, respectivamente. Com efeito, a taxa de juro *forward* é maior (menor) do que a taxa *spot* se e só se a taxa *spot* está a aumentar (diminuir). A taxa de juro *forward* é igual à taxa de juro *spot* se e só se a taxa *spot* é constante. Deve no entanto realçar-se que uma curva de taxas *spot* ascendente não é suficiente para assegurar que a curva de taxas *forward* também é crescente em todo o intervalo considerado.

Por último, é ainda possível estabelecer a seguinte relação:¹⁴

$$i(0,t) = \frac{\int_0^t f(0,z)dz}{t} \quad (3.4)$$

Ou seja, a taxa de juro *spot* para a maturidade t não é mais do que uma média aritmética das taxas *forward* registadas no intervalo $[0,t]$.

Uma das formas de caracterizar a relação entre as taxas de juro e o seu respectivo prazo consiste em usar a TRA implícita na cotação de obrigações de taxa fixa sem risco de crédito. Embora se trate de uma solução simples do ponto de vista prático, existem argumentos suficientemente fortes para sustentar a natureza imprecisa desta representação. Em primeiro lugar, a TRA pode ser vista como uma média das taxas *spot* registadas num determinado intervalo de tempo oferecendo, nos casos em que a EPTJ não é horizontal, uma solução desajustada para actualizar fluxos financeiros futuros.

Em segundo lugar, para uma dada estrutura de taxas *spot* a TRA de uma obrigação clássica depende da sua taxa de cupão. Este fenómeno, conhecido por “efeito cupão”, tem como consequência que duas obrigações clássicas que expiram no mesmo momento, mas que têm taxas de cupão diferentes, tenderão a apresentar TRA distintas.¹⁵ Em suma, a TRA não é única para cada prazo, algo que não acontece para as taxas *spot* e

(14) Para mais detalhes sobre a demonstração destas fórmulas recomenda-se a leitura de Neftci (2000), Martellini e Priaulet (2001), Grandeville (2001) e Rebonato (2000).

(15) A justificação para tal é a de que, *ceteris paribus*, o conceito de TRA não incorpora o perfil temporal dos pagamentos da obrigação, ou seja, não efectua qualquer distinção entre as obrigações de alta e baixa taxa de cupão. Nestas condições, o peso dos pagamentos intermédios no valor de mercado do título é tanto maior quanto mais elevada for a taxa de cupão. Assim, dadas duas obrigações com a mesma maturidade e cupão distinto, a TRA será mais elevada para a aquela que tem menor (maior) cupão no caso de a EPTJ de taxas *spot* ser crescente (decrecente) com a maturidade.

forward. Por estas razões, a maioria dos autores aconselha o uso das taxas *spot* para representar a EPTJ. O efectivo cumprimento deste desejo esbarra, contudo, com o facto de na maioria dos mercados não existirem obrigações de cupão zero para todos os prazos desejados, especialmente no segmento de médio e longo prazo.

Para ultrapassar esta contrariedade, foram surgindo na literatura inúmeras técnicas de estimação da EPTJ baseadas, todas elas, em informação fornecida pelo mercado para o preço de obrigações clássicas, contratos de *swap* e, nalguns casos, futuros de taxa de juro.¹⁶ Estes métodos podem ser agrupados em duas grandes categorias: métodos directos e métodos indirectos. Os *métodos directos* pressupõem a decomposição de uma obrigação clássica num conjunto de obrigações de cupão zero, e a subsequente extracção das taxas de juro *spot* implícitas por recurso às técnicas de *bootstrapp* e de *regressão linear* (Carleton e Cooper (1976)).

Os *métodos indirectos* têm como característica comum o facto de envolverem o ajustamento dos dados de mercado a uma função pré-definida para a EPTJ. O ajustamento pode ser feito parametrizando a função de desconto¹⁷ ou, em alternativa, parametrizando directamente a curva de taxas *spot*.¹⁸

A determinação da estrutura por prazos de taxas *forward* é bastante simples uma vez determinada a curva de taxas *spot*, dado que qualquer posição futura pode ser replicada

(16) A descrição detalhada dos métodos de estimação da EPTJ ultrapassa largamente o objectivo deste trabalho pelo que se remete o leitor mais interessado para as excelentes apresentações fornecidas por Martellini e Priaulet (2001), Grandeville (2001) e Fonseca (1999).

(17) Destacando-se, neste grupo, o método de ajustamento *polinomial* (McCulloch (1971;1975)) e o método de ajustamento *exponencial*. (Vasicek e Fong (1982)).

(18) Evidenciando-se, neste grupo, o método de ajustamento por *exponenciais de polinómio*, o modelo de Nelson-Siegel-Svensson e o modelo de Vasicek.

através da compra e da venda de obrigações de cupão zero. A representação da EPTJ usando taxas *forward* fornece, com base nalgumas hipóteses, informação importante sobre as expectativas dos agentes relativamente às taxas de juro e inflação futuras, e relativamente às expectativas de depreciação cambial.

3.3. Teorias Explicativas da Estrutura por Prazos das Taxas de Juro

Fazemos, neste ponto, uma breve alocução às principais teorias que explicam a configuração e o comportamento temporal da EPTJ, procurando sintetizar as contribuições dos inúmeros autores que a este tema se dedicaram.¹⁹

3.3.1. Teoria das Expectativas Puras ou Racionais

A *teoria das expectativas puras* ou *racionais* sustenta, em traços gerais, que a configuração da EPTJ é, em cada momento do tempo, determinada pelas expectativas dos agentes económicos relativamente às taxas de juro futuras. A formalização desta teoria, atribuída a Lutz (1940) e Malkiel (1966), assenta nos seguintes pressupostos:²⁰

- i) Os investidores desejam maximizar o retorno obtido pelo investimento no horizonte temporal definido;
- ii) Os investidores não revelam qualquer preferência por determinadas maturidades e consideram os vários prazos como substitutos perfeitos;
- iii) As expectativas dos investidores são homogéneas;

(¹⁹) Para uma revisão mais rigorosa e detalhada das teorias explicativas da EPTJ recomenda-se a leitura de Shiller e McCulloch (1990) e Fonseca (1999).

(²⁰) As versões de Lutz (1940) e Malkiel (1966) diferem, entre si, apenas no que toca: (i) ao prazo das taxas de juro sobre o qual são formuladas expectativas pelos investidores, e (ii) ao horizonte temporal de análise abrangido por essas mesmas expectativas.

- iv) Os investidores exibem um comportamento de neutralidade face ao risco de errarem as suas previsões;
- v) Não existem custos de transacção, impostos, ou restrições de liquidez; o risco de crédito é nulo.

Na sua interpretação mais geral, a teoria das expectativas puras sustenta que a EPTJ é determinada pelo mercado de modo a que o retorno esperado de um investimento obrigacionista seja, para um determinado horizonte temporal, independente das obrigações que compõem a carteira (e da sua maturidade). Nestas condições, a taxa de juro para um determinado prazo, T , será igual à média (geométrica) das sucessivas taxas de juro de curto prazo que, se aguarda, venham a prevalecer até esse momento. Em termos formais,

$$(1+i_{0,T})^T = (1+i_{0,1})(1+E(i_{1,1})).\dots.(1+E(i_{T-1,1})) \quad (3.5)$$

onde $E(i_{T-1,1})$ representa, neste caso, a taxa de juro esperada daqui a $T-1$ anos para uma aplicação a 1 ano. De acordo com esta teoria, as taxas *forward* implícitas na actual EPTJ constituem estimadores não enviesados das futuras taxas de juro de curto prazo. Curvas de rendimentos com configuração crescente (decrescente) sinalizam a existência de uma espécie de consenso no mercado quanto a uma previsível subida (descida) das taxas de juro futuras. Uma EPTJ horizontal é sintoma de que os agentes não antecipam qualquer movimento para as taxas de juro futuras.

Cox, Ingersoll e Ross (1981) demonstram que a existência de incerteza relativamente ao valor futuro das taxas de juro é suficiente para que, num contexto de neutralidade face ao risco, as várias hipóteses decorrentes da teoria das expectativas puras sejam

inconsistentes entre si. Segundo estes autores, a incompatibilidade pode ser ludibriada admitindo que os retornos esperados do investimento apenas são iguais num horizonte temporal de curto prazo. Esta hipótese é conhecida por *hipótese de expectativas locais*.

3.3.2. Teoria dos Prémios de Risco (ou de Liquidez)

A *teoria dos prémios de risco* ou *de liquidez*, atribuída a Hicks (1939), não renega a importância das expectativas na determinação do equilíbrio no mercado de taxas de juro, mas rejeita o pressuposto base de que os investidores são neutros face ao risco. Em contrapartida, Hicks admite que os investidores são avessos ao risco e que preferem naturalmente as aplicações que, prometendo igual retorno esperado, exibem menor risco e maior liquidez.

É sabido que o risco de perda de capital (risco de mercado) induzido por um movimento adverso nas taxas de juro (subida) é mais acentuado nas obrigações de longo prazo do que nas obrigações de curto prazo. Nestas condições, o mercado tenderá a apresentar um excesso de procura de títulos de curto prazo ou, o que é o mesmo, um défice de procura no segmento de longo prazo. No lado da oferta as empresas emitentes procuram normalmente financiamentos de longo prazo, seja por forma a concretizarem sem sobressaltos os planos de expansão de negócio, seja de modo a garantirem o cumprimento atempado do serviço da dívida. Assim sendo, é de prever um excesso de oferta de títulos de longo prazo.

Perante esta situação de desequilíbrio estrutural no mercado, a que Hicks chama *constitutional weakness*, os investidores apenas estarão receptivos a transferir as suas

aplicações em títulos de curto prazo para títulos de maturidade mais longa se lhes for oferecido uma compensação – *um prémio de risco ou de liquidez*, L_t – por aceitarem um risco acrescido. Em termos formais, a equação de equilíbrio da EPTJ determinada por esta teoria é a seguinte:

$$(1+i_{0,T})^T = (1+i_{0,1})(1+E(i_{1,1})+L_{1,1}).....(1+E(i_{T-1,1})+L_{T-1,1}) \quad (3.6)$$

A existência de um prémio de risco dificulta a interpretação das taxas de juro *forward* subjacentes à configuração da EPTJ. Tal é assim porquanto as taxas de juro implícitas comportam agora, não apenas as expectativas dos agentes relativamente às taxas futuras, mas também o mencionado prémio de risco ou liquidez, sendo que nenhuma destas parcelas é directamente observável no mercado.

A teoria dos prémios de risco foi criticada pelo facto de estipular que a tentativa de reduzir o risco de perdas de capital mobilizaria todos os investidores para aplicações de curto prazo. Aquilo que se verifica, na prática, é que esta solução pode inclusive considerar-se irracional na medida em que preconiza um desajustamento entre as características (de risco) da carteira e o horizonte temporal de investimento (HTI).²¹

3.3.3. Teorias Institucionais

As teorias institucionais – *teoria da segmentação dos mercados e teoria do habitat preferido* – questionam directamente uma das hipóteses base da teoria das expectativas puras:

(²¹) Não sendo obviamente admissível que todos os investidores tenham o mesmo HTI, dado que o seu período de disponibilidade de fundos difere. Acresce que esta teoria ignora uma das componentes do risco de taxa de juro – *risco de reinvestimento* – na apreciação das preferências dos investidores e na determinação da magnitude dos prémios de risco.

aquela que estabelece que as obrigações de prazos diferentes constituem substitutos perfeitos para o investidor. Em alternativa, estas teorias defendem que emitentes e investidores são avessos ao risco, e que por isso tem preferência por realizar operações nos segmentos de mercado que mais se ajustam às suas necessidades.²² A preferência por um determinado segmento é ditada, não apenas pela natureza das actividades desenvolvidas pelos agentes, mas também por disposições regulamentares ou institucionais que impõem certas restrições.²³

Os efeitos de contágio entre segmentos são, neste caso, mínimos (ou inclusive nulos). A EPTJ daqui resultante é determinada pelas condições da procura e da oferta de fundos em cada segmento, com pouca (ou nenhuma) relação de interdependência entre as taxas de juro para os diferentes prazos. Apresentamos, em seguida, um breve resumo das principais diferenças entre as duas teorias institucionais referenciadas.

3.3.3.1. Teoria da Segmentação dos Mercados

A *teoria da segmentação dos mercados* defende que existe uma independência absoluta entre os vários segmentos do mercado obrigacionista desprezando, deste modo, a importância das expectativas sobre as taxas de juro futuras na configuração da EPTJ. Ainda segundo esta teoria, o objectivo de reduzir o risco de taxa de juro é pretexto

(²²) Por exemplo, as companhias de seguros concentram as suas responsabilidades num horizonte temporal relativamente distante, pelo que revelam uma clara preferência por aplicações de longo prazo procurando, assim, obter um fluxo de pagamentos mais ou menos certo e constante. Os bancos comerciais têm, por seu turno, uma estrutura de responsabilidades essencialmente de curto prazo, pelo que a prudência aconselha à manutenção de uma parcela significativa dos activos em aplicações com elevado grau de liquidez.

(²³) Por exemplo, restrições no acesso a alguns mercados.

suficiente para que os investidores seleccionem carteiras de activos com estruturas de maturidade semelhantes às estruturas das responsabilidades.

A existência de compartimentos de procura e oferta estanques, com a taxa de retorno de cada segmento a ser determinada exclusivamente pelas condições de equilíbrio nesse mercado, têm duas implicações importantes. Em primeiro lugar, a fraca (ou nula) substituíbilidade entre activos de maturidade distinta impede o aproveitamento de oportunidades de arbitragem em resposta a alterações nas taxas de retorno. Em segundo, atribui às entidades emitentes com maior peso no mercado (o Tesouro, por exemplo) a capacidade de influenciar a configuração da EPTJ.²⁴

3.3.3.2. Teoria do Habitat Preferido

A *teoria do habitat preferido*, atribuída a Modigliani e Such (1966;1967), combina elementos das três teorias já apresentadas rejeitando, no entanto, as suas posições extremas. Os seus defensores sublinham que tanto devedores como investidores têm fortes preferências relativamente ao período de tempo durante o qual desejam efectuar operações de cedência ou obtenção de fundos, mas admitem que a existência de prémios de risco²⁵ atractivos pode desviar alguns agentes do seu habitat preferido.

(²⁴) A justificação é simples. Se o Tesouro canalizar as suas emissões predominantemente para um determinado segmento estará, supondo que as condições da procura se mantêm inalteradas, claramente a influenciar a taxa de juro que nele se pratica o que, admitindo a segmentação do mercado, se traduzirá numa alteração da inclinação da EPTJ. Esta conclusão contraria o suposto pela teoria das expectativas puras onde, recorde-se, a inclinação da EPTJ é determinada unicamente pelas expectativas dos agentes.

(²⁵) Conforme salienta Fonseca (1999), esses prémios de risco tanto podem ser destinados a compensar o risco de perdas de capital como a compensar o risco de reinvestimento, consoante se trate de investidores cujo habitat preferido se situa, respectivamente, no curto ou no longo prazo, e que optam por realizar aplicações no segmento oposto. Os prémios de risco podem ser positivos ou negativos, consoante exista insuficiência ou excesso de procura num determinado segmento, respectivamente.

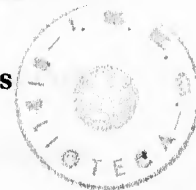
A teoria do habitat preferido baseia-se, deste modo, na noção realista de que os investidores que participam no mercado estão dispostos a aceitar algum risco adicional por se situarem fora do seu segmento preferido, desde que em que contrapartida recebam um retorno esperado superior.

3.3.4. Modernas Teorias Explicativas

As teorias mais recentes sobre o comportamento da EPTJ admitem que as alterações nas taxas de juro ao longo do tempo são determinadas pelo comportamento estocástico de uma ou mais variáveis de estado (fontes de incerteza). Entre as várias modelizações sugeridas neste contexto, que serão analisadas em detalhe nos capítulos 8 e 9, é possível distinguir dois tipos de abordagens.

Nos chamados *modelos de equilíbrio* a imposição antecipada de restrições de consistência interna assegura a inexistência de oportunidades de arbitragem no mercado e determina, endogenamente, a EPTJ.

Os *modelos de não arbitragem* são desenhados, pelo contrário, de modo a que a dinâmica de toda a EPTJ seja imediatamente consistente com dados observados no mercado para as taxas de juro e, nalguns casos, para a sua estrutura por prazos de volatilidade.



II. Modelos de Risco de Taxa de Juro para Activos com Cash Flows Certos

A segunda parte deste trabalho será inteiramente dedicada ao estudo dos modelos que incidem, primariamente²⁶, sobre activos financeiros que libertam cash flows certos, i.e., cash flows conhecidos com certeza no momento em que as decisões de investimento e cobertura são colocadas.

4. Modelos de Factor Único Dependentes do Processo Estocástico

Os modelos de factor único assumem que a dinâmica das taxas de juro é determinada por uma única fonte de incerteza, e que por isso todas as taxas *spot* ao longo da EPTJ devem estar perfeitamente correlacionadas. Apresentamos, neste capítulo, um conjunto de modelos de risco de taxa de juro que têm como característica comum o facto de se basearem em especificações prévias sobre o comportamento das taxas de juro. Os modelos diferenciam-se, entre si, pelas diferentes concepções adoptadas quanto à forma como a EPTJ se desloca.

4.1. Modelo de Duração de Macaulay

4.1.1. Definição e Evolução Histórica do Conceito de Duração

*«Let us use the word duration to signify the essence of the time element in a loan».*²⁷

O conceito de duração foi introduzido por Frederic Macaulay (1938) no seguimento dos seus esforços para desenvolver um indicador mais adequado para o *tempo de vida* de

(²⁶) Alguns dos modelos classificados nesta secção podem ser facilmente aplicados a activos com cash flows dependentes da taxa de juro.

(²⁷) Macaulay (*Op. Cit.*, pp. 44).

uma obrigação do que o seu tempo até à maturidade. Para obrigações que libertam mais do que um cash flow, Macaulay defende que a medida a utilizar deveria consistir numa média ponderada²⁸ do tempo que mediava até cada um dos seus pagamentos (cupões e valor de reembolso).

Para descontar os pagamentos futuros da obrigação Macaulay opta, por uma questão de simplificação²⁹, por usar a TRA, em detrimento do recurso à EPIJ. Em termos formais, e considerando o regime de capitalização discreta (anual), a *Duração de Macaulay* (D) é definida por:

$$D = \frac{1}{B(i)} \sum_{t=1}^T t \cdot c_t (1+i)^{-t} \quad (4.1)$$

Ou, de forma alternativa, por³⁰

$$D = \sum_{t=1}^T t \cdot \phi_t \quad \text{com} \quad \phi_t = \frac{c_t (1+i)^{-t}}{B(i)} \quad \text{e} \quad \sum_{t=1}^T \phi_t = 1 \quad (4.2)$$

O conceito de duração pode ser interpretado de várias formas:³¹

(²⁸) Pela contribuição do valor actual de cada um dos cash flows para o preço de mercado da obrigação.

(²⁹) O autor justifica-se (*op. cit.*, pp. 52) invocando dificuldades em obter taxas de desconto, numa base semestral, para todos e cada um dos momentos futuros em que os activos geram rendimentos.

(³⁰) Para sermos mais precisos, a fórmula indicada em (4.1) apenas é válida nos momentos exactos em que os cupões são pagos (e assumindo que as datas de pagamento do cupão e ex-juro coincidem), uma vez que não considera o efeito dos juros corridos. O cálculo da duração de Macaulay entre datas de pagamento de cupão pode ser efectuado mediante a seguinte expressão:

$$D = \frac{1}{B(i) + J_c} \sum_{t=1}^T (t - \theta) \cdot c_t (1+i)^{-(t-\theta)} \quad (4.3)$$

onde θ representa a fracção de tempo (medida em anos) decorrida desde o último pagamento de cupão, J_c denota o juro corrido ($J_c = \theta \times c$), e as demais variáveis têm o significado habitual.

(³¹) De entre as múltiplas interpretações avançadas para o conceito de duração destacamos, pelo seu carácter intuitivo, aquela que lhe foi dada no contexto da física por Strong (1990). Tratando-se de uma média ponderada, a duração pode definir-se como um *centro de gravidade*: o centro de gravidade para os cash flows actualizados da obrigação. Uma última interpretação é fornecida por Grandville (2001, pp. 84): «Duration can be thought of as the average time you have to wait to get back your money from the bond issuer».

- i) Como uma média ponderada do período de tempo que decorre até ao pagamento dos cash flows da obrigação, onde os ponderadores ϕ_t não são mais do que a proporção com que cada um desses pagamentos contribui para o valor de mercado do título,
- ii) Alternativamente, a duração de uma obrigação clássica pode ser interpretada como o tempo até à maturidade da obrigação de cupão zero que lhe é equivalente em termos de sensibilidade face ao risco de taxa de juro,

A interpretação dada por Macaulay ao conceito de duração revestia-se de uma inegável valia intuitiva (como um indicador da vida média de uma obrigação), mas a medida carecia de significado económico.³² Este só se tornaria claro após Hicks (1939) ter derivado, de forma independente, a equação (4.1) como uma elasticidade do preço da obrigação com respeito ao factor de desconto $(1+i)^{-1}$, assumindo que a taxa de juro era idêntica para todos os prazos.³³

(³²) Bierwag, Kaufman e Khang (1978) sugerem que as medidas de duração foram desenvolvidas com três propósitos principais: (i) como um indicador das características temporais de um fluxo de pagamentos (por exemplo, de uma obrigação), (ii) como um índice que mede a resposta dos preços das obrigações a modificações nas taxas de juro e, por último, (iii) como um *input* dos modelos de imunização. Apesar de a utilização do conceito de duração não se ter resumido a estes três domínios, resulta evidente que, de entre as três interpretações fornecidas pelos autores, a primeira é a única que carece de significado económico.

(³³) A elasticidade derivada por Hicks apresentava, todavia, características especiais uma vez que encerrava uma dimensão temporal a que o autor chamou *período médio*. Citando o autor (*op. cit.*, pp. 187), «[...] The reader may also find it rather surprising that an elasticity, usually supposed to be a pure number, independent of units, turns out to be equal to a length of time. This is a consequence of compound interest». O aparente dilema criado pela utilização do regime de capitalização discreta *vs.* regime de capitalização contínua na dimensão temporal do conceito de duração só seria completamente esclarecido por Cooper (1977, pp. 703). Ao contrário de Macaulay, Hicks utiliza o conceito de duração essencialmente como medida de risco de taxa de juro. O seu objectivo principal era o de mostrar a forma como as taxas de juro afectam os preços dos activos. O autor conclui que as alterações nas taxas de juro não modificam o preço relativo de dois activos, desde que estes tenham a mesma duração.

Desconhecendo os trabalhos de Macaulay e Hicks, Samuelson (1945)³⁴ e Redington (1952)³⁵ redescobrem o conceito de duração nos seus estudos sobre a sensibilidade da situação líquida das instituições financeiras face a variações nas taxas de juro. Fisher e Weil (1971) generalizaram a noção de duração por forma a que o preço das obrigações pudesse reflectir uma EPTJ não horizontal, continuando todavia a assumir que os choques de taxa de juro são do tipo paralelo.

Medidas alternativas de duração foram entretanto desenvolvidas por Bierwag (1977), Khang (1979), Babbel (1983), Vasicek (1977), Cox *et al.* (1979), Wu (2000), Brennan e Schwartz (1982), Nelson e Schaefer (1983), Kelly e Thurston (1995), Munk (1999), entre outros, correspondendo, ou a formulações distintas para a dinâmica das taxas de juro, ou a diferentes concepções sobre a forma como a EPTJ se desloca.

Barber (1999) propõe uma definição generalizada de duração tomando como ponto de partida a representação da EPTJ por uma função do tipo afim. Rzadkowski e Zaremba (2000) estendem o conceito aos casos em que os choques sobre a EPTJ são modelizados em termos de uma soma finita de funções contínuas.

Cooper (1977), Garbade (1985b), Chambers, Carleton e McEnally (1988), Reitano (1989), Ho (1990), Willner (1996), Chambers e Nawalkha (1997), entre outros,

(³⁴) Samuelson deriva a equação (4.1) utilizando uma taxa de juro média para descontar os *cash inflows* e *outflows*, e apelida a estatística assim obtida de *período temporal médio*. O autor pretendia analisar a sensibilidade da situação líquida das instituições financeiras face a variações nas taxas de juro, tendo concluído que os aumentos nas taxas de juro beneficiariam as empresas cujo período temporal médio dos pagamentos fosse superior ao período temporal médio dos recebimentos.

(³⁵) Redington, um eminente actuário britânico, responsável pela introdução do conceito de imunização na literatura sobre a gestão do risco de taxa de juro, utiliza uma metodologia similar à de Samuelson para derivar a equação (4.1). O autor assume que a EPTJ é horizontal e apenas se desloca de forma paralela para obter um indicador do risco de taxa de juro que designa por *termo médio*. Com base neste conceito, demonstra que a situação líquida das companhias de seguros (ramo vida) é imune face a variações no nível geral de taxas de juro se o termo médio dos activos for igual ao termo médio dos passivos.

exploram a noção de *vector de duração* no contexto da imunização de carteiras obrigacionistas contra choques múltiplos e não paralelos sobre a EPTJ.³⁶ Analisamos, em seguida, uma das principais utilizações do conceito de duração.

4.1.2. A Duração de Macaulay Enquanto Medida do Risco de Taxa de Juro

A definição e interpretação dada por Macaulay ao conceito de duração carecia, tal como referimos, de significado económico, e não permitia aquilatar, pelo menos de forma directa, a sua utilidade enquanto medida do risco de taxa de juro. A interpretação do conceito nestes moldes ganharia contornos bem definidos após os trabalhos de Hicks (1939), Fisher (1966) e, principalmente, Hopewell e Kaufman (1973).

De facto, Hopewell e Kaufman demonstram, analiticamente, que a volatilidade-preço das obrigações é directamente proporcional à sua duração, e que a tentativa de relacionar o risco dos títulos com a sua maturidade é incorrecta, especialmente para obrigações cotadas abaixo do par³⁷. Se derivarmos a equação (2.1) com respeito à TRA e dividirmos pelo preço da obrigação obtemos, após alguma manipulação algébrica:

$$\frac{1}{B(i)} \frac{dB(i)}{di} = -\frac{1}{1+i} \left[\frac{1}{B(i)} \sum_{t=1}^T t \cdot c_t (1+i)^{-t} \right] = -\frac{D}{1+i} \quad (4.4)$$

(³⁶) Nos últimos anos têm-se assistido a uma tentativa de alargar o âmbito de aplicação do conceito de duração, procurando reflectir na sua definição factores tão diversos como a existência de impostos, de risco de incumprimento, de risco de liquidez, de cláusulas de reembolso antecipado, de incerteza sobre os cash flows gerados pelos activos, etc.

(³⁷) Se exceptuarmos o caso das obrigações de cupão zero, a relação entre a duração de Macaulay e a maturidade de uma obrigação é não linear e complexa, não constituindo a maturidade um bom indicador do risco de taxa de juro. Para mais detalhes veja-se o ponto 4.1.3.

A parcela do lado esquerdo da equação (4.4) é habitualmente designada por *sensibilidade* do preço da obrigação com respeito a variações em i . Já o rácio da duração de Macaulay pelo factor $(1+i)$ ficaria conhecido na literatura por *Duração Modificada* de Macaulay (D_m)³⁸. A utilização de D_m em (4.5) permite-nos confirmar que existe uma relação linear entre a volatilidade dos retornos de uma obrigação e as variações na TRA,

$$\frac{\Delta B(i)}{B(i)} \cong -D_m \cdot \Delta i \quad (4.5)$$

cujas variância e desvio padrão são dados simplesmente por:

$$\text{Var}\left(\frac{dB}{B}\right) = D_m^2 \text{Var}(di) \quad \sigma\left(\frac{dB}{B}\right) = D_m \sigma(di) \quad (4.6)$$

Resumindo, o risco (medido pelo desvio padrão) de uma obrigação é proporcional ao risco de variações na taxa de juro, sendo que o coeficiente de proporcionalidade não é outro que a duração modificada.

4.1.3. Propriedades da Duração

Antes de avançarmos para a utilização do conceito na definição de estratégias de imunização e de cobertura do risco de taxa de juro, abrimos um parêntesis para analisar os principais determinantes da duração de Macaulay. As propriedades da duração de Macaulay são analisadas em detalhe por Francis (1986), Fabozzi (1988;2000), Bierwag (1987), Hawawini (1982), Garbade e Dym (1984), Grandville (2001) e Douglas (1990),

(38) Se multiplicarmos ambos os lados da equação (4.4) pelo factor $(1+i)$ obtemos:

$$-\frac{(1+i)}{B} \frac{dB}{d(1+i)} = D$$

Este resultado permite-nos concluir, à imagem de Hicks (1939), que a duração é uma medida da elasticidade-taxa de juro do preço das obrigações.

entre outros. Da definição de duração adiantada em (4.1) resulta claro que esta depende de três variáveis: taxa de cupão, taxa de rendimento actuarial e maturidade. O quadro 4.1 resume a direcção em que cada uma destas variáveis influencia a duração.

Quadro 4.1: Determinantes da Duração de Macaulay

		Obrigações Cotadas		
		Abaixo do Par	Ao Par	Acima do Par
Taxa de Cupão	(c/B_T)	(-)	(-)	(-)
TRA	i	(-)	(-)	(-)
Maturidade	$(T - t)$	(+ / -)	(+)	(+)

A relação entre a duração de Macaulay e a taxa de cupão pode ser enunciada através da seguinte propriedade: **Prop. 1:** *Quanto maior for a taxa de cupão menor será, para uma mesma TRA e maturidade, a duração de uma obrigação.*

Este resultado intuitivo é explicado, por um lado, pelo facto de nas obrigações com cupão elevado o peso dos cash flows intermédios relativamente ao último cupão (que inclui o valor de reembolso) ser superior, o que reduz a vida média do empréstimo e, por outro, é uma consequência do próprio mecanismo de actualização, que “penaliza” de forma mais acentuada os pagamentos mais afastados no tempo.³⁹

(³⁹) A validade desta conclusão pode ser confirmada, de forma mais rigorosa, recorrendo a uma solução fechada para a duração de Macaulay. Fórmulas fechadas podem ser encontradas em Chua (1984, 1985, 1988), Babcock (1985), Caks *et al.* (1985), Moser e Lindley (1989), Fabozzi (2000), Grandville (2001), Nawalkha e Lacey (1988;1990), entre outros. Grandville (*op. cit.*, pp. 166) sugere a seguinte expressão:

$$D = \frac{1}{i} + \Theta + \frac{N/m(i - c/B_T) - (1 + i/m)}{(c/B_T)((1 + i/m)^N - 1) + i}, \quad 0 \leq \Theta \leq 1$$

onde Θ representa o período de tempo, medido em anos, que falta até ao pagamento do próximo cupão, m indica o número de vezes que a obrigação liberta cupões por ano, N denota o número total de cupões que restam por pagar, e as demais variáveis têm o significado habitual. Uma observação atenta desta equação permite verificar que quanto maior for a taxa de cupão (c/B_T) tanto menor será a duração da obrigação.

Relativamente à conexão entre a duração e a TRA, esta pode ser enunciada através da seguinte propriedade: **Prop. 2:** *Existe uma relação inversa entre a duração de Macaulay e a TRA à qual é transaccionada a obrigação no mercado.*⁴⁰

Em termos formais, demonstra-se que a 1ª derivada da duração de Macaulay (conforme a equação (4.1)) em ordem à TRA pode ser representada por:

$$\frac{dD}{di} = -(1+i)^{-1} \cdot S \quad (4.7)$$

onde

$$S = \sum_{t=1}^T \phi_t \cdot (t-D)^2 \quad (4.8)$$

e onde S , habitualmente designada por *dispersão*, define uma medida da variância dos momentos de pagamento da obrigação em torno da sua duração⁴¹. Dado que se trata de uma variância, que assume naturalmente sempre valores positivos, podemos concluir que a relação entre a duração de Macaulay e a TRA é sempre negativa.

A relação entre a duração e a maturidade de uma obrigação é bastante mais complexa, mas pode ser enunciada pelas propriedades 3 a 7: **Prop. 3:** *A duração de uma obrigação de cupão zero é igual à sua maturidade, o mesmo se verificando para as obrigações clássicas quando a estas apenas resta um pagamento por efectuar.*

(⁴⁰) Os fundamentos desta propriedade são simples. As subidas (descidas) na TRA afectam negativamente (positivamente) os factores de desconto $(1+i)^{-t}$, e de forma mais (menos) acentuada aqueles que correspondem aos pagamentos mais (menos) distantes no tempo. Tal significa que o centro de gravidade dos cash flows se desloca para a esquerda (direita), pelo que a duração diminui (aumenta).

(⁴¹) Bierwag (1979) apelida esta medida de dispersão de “*inércia*”, uma vez mais estabelecendo um paralelismo com a sua interpretação no contexto da física. A unidade de medida de S é (anos)². A utilização desta estatística no contexto da estratégia de imunização do balanço será desenvolvida no capítulo 10. É de salientar ainda que, tal como teremos oportunidade de verificar no capítulo 5, a medida de dispersão S constitui um caso particular do conceito de M^2 proposto por Fong e Vasicek (1983;1984) no contexto da minimização do risco de processo estocástico.

Prop. 4: *Para as obrigações clássicas com mais do que um pagamento por efectuar a duração é sempre inferior à maturidade, e tende para o valor limite dado por $(1+1/i)$ à medida que a maturidade aumenta infinitamente. Este limite corresponde à duração de uma obrigação consolidada (perpetuidade), e é independente da respectiva taxa de cupão.*

Prop. 5: *A duração de obrigações cotadas ao par ($c/B_T = i$) ou acima do par ($c/B_T > i$) cresce monotonamente (embora a taxas decrescentes) com a maturidade, e tende para $(1+1/i)$ à medida que a maturidade caminha para o infinito.*

Prop. 6: *A duração de obrigações cotadas a desconto ($c/B_T < i$) aumenta, num primeiro momento, com a maturidade, até atingir o valor máximo⁴² num patamar superior ao da duração das obrigações consolidadas, decrescendo a partir de então com o prazo de vencimento em direcção ao limite $(1+1/i)$.*

Prop. 7: *A duração de uma obrigação diminui à medida que esta se aproxima do seu vencimento. Entre datas correspondentes ao pagamento de cupão, a duração decresce numa base de um-por-um com a passagem do tempo, ou seja, diminui um dia por cada dia que passa. Nas datas em que a obrigação paga cupão, a duração aumenta dando um “salto” descontínuo, sem que contudo se alcance o pico correspondente ao pagamento do cupão anterior. Este salto será tanto maior quanto mais distante estiver, à data, o vencimento da obrigação.*

A propriedade 3 não carece de fundamentação adicional mas permite, quando conjugada com a propriedade 7, obter um corolário interessante: *a duração de obrigações de cupão zero, ou de obrigações clássicas com apenas um cupão por pagar, decresce (numa base de um-por-um) com a diminuição do tempo até à maturidade.*

⁽⁴²⁾ A demonstração analítica da relação entre a duração e a maturidade pode ser encontrada em Hawawini (1982) e Hopewell e Kaufman (1973).

No que respeita ao limite comum para o qual tende a duração das obrigações clássicas, e ao comportamento, porventura inesperado, da duração de obrigações cotadas abaixo do par, são necessárias algumas explicações adicionais. O significado económico do tecto comum é rapidamente percebido relembrando, por um lado, que a duração pode ser interpretada como o período de tempo necessário à recuperação do investimento inicial, e por outro, que a taxa de juro traduz a percentagem desse investimento que é recebida por unidade de tempo. Neste contexto, o inverso da taxa de juro, $(1/i)$, corresponde ao período de tempo que é necessário aguardar para reaver a totalidade do investimento inicial.⁴³

No que toca à propriedade 6, esta encerra dois comportamentos anómalos para a relação entre a duração e a maturidade de obrigações cotadas abaixo do par⁴⁴. O primeiro, corresponde à possibilidade da duração poder atingir valores superiores aos da duração de obrigações perpétuas. O segundo, refere-se ao facto da duração decrescer com a maturidade, a partir de um determinante ponto.

(⁴³) O tecto comum corresponde, como vimos, à duração de uma obrigação perpétua, e pode ser facilmente obtido calculando o valor limite (quando $T \rightarrow \infty$) da solução fechada para a duração de Macaulay proposta por Grandville (2001), no caso particular em que os cupões são pagos anualmente ($m = 1$) e falta exactamente um ano para o pagamento do próximo cupão ($\Theta = 1$):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} D = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{i} + \frac{T(i - c/B_T) - (1+i)}{(c/B_T)((1+i)^T - 1) + i} \right] = 1 + \frac{1}{i}$$

onde N foi substituído por T , a maturidade da obrigação em anos. A razão pela qual este limite é igual a $(1 + 1/i)$ está relacionada com a circunstância do pagamento dos cupões ser feito de forma descontínua no tempo, pelo que o investidor deve esperar uma unidade de tempo (neste caso um ano) antes de receber o primeiro cash flow. Se admitirmos que as obrigações pagam cupão continuamente demonstrasse, sem surpresa, que o valor limite da duração quando $T \rightarrow \infty$ é igual ao inverso da taxa de juro $(1/i)$.

(⁴⁴) Em consequência deste comportamento anómalo, existe uma possibilidade real de obrigações com maturidade mais longa apresentarem uma sensibilidade face à taxa de juro inferior à de obrigações com prazo de vencimento mais curto. Era esta mesma preocupação que Malkiel (*op. cit.*, pp.65) revelava no seguinte excerto: «[...] it is possible to find cases where long-term securities are actually less sensitive to a given change in market interest rates than other shorter issues».

Ambas as anomalias são fruto da conjugação dos efeitos contrários que sobre a duração são produzidos, quer pelo aumento do número de pagamentos (efeito negativo), quer pela redução do preço de mercado da obrigação (efeito positivo)⁴⁵, em consequência de um aumento da maturidade.⁴⁶

O comportamento atípico da duração à medida que a obrigação se aproxima do seu vencimento e, muito especialmente, nos momentos em que ocorre o pagamento de cupão, é explicado pelas convenções adoptadas nas generalidade dos mercados, que prevêem o pagamento do cupão de forma periódica e não de forma contínua. É ainda o reflexo do facto do juro corrido constituir uma parcela do retorno da obrigação que é insensível às oscilações na taxa de juro ou, o que é o mesmo, tem uma duração nula.⁴⁷

(45) Bierwag (1987, pp.68) apelida este último efeito de *efeito preço*. Deve salientar-se neste ponto que, ao contrário daquilo que se verifica nas obrigações cotadas ao par ou acima do par, para as quais um aumento da maturidade não altera ou aumenta o preço de mercado, respectivamente, no caso das obrigações cotadas abaixo do par o aumento da maturidade traduz-se numa redução do preço. //

(46) A eventualidade de, numa situação em que as taxas de mercado são bastante superiores à taxa de cupão, a duração poder exceder, a partir de um determinado ponto, a duração das perpetuidades, é explicada pelo facto de nestas condições o efeito preço mais do que compensar o efeito negativo que alguns dos cash flows da obrigação induzem sobre a duração, em consequência do alargamento da maturidade. No entanto, com o aumento da maturidade a duração atinge um valor máximo, a partir do qual decresce, fruto de uma alteração no peso relativo com que os diferentes cash flows da obrigação contribuem para a duração, que beneficia os pagamentos mais próximos no tempo. //

(47) A descontinuidade no comportamento da duração não invalida a sua utilização enquanto medida do risco de taxa de juro. Uma interpretação apressada da propriedade 7 levar-nos-ia a concluir que uma obrigação é mais volátil imediatamente após o pagamento de um cupão, uma vez que a sua duração aumenta. Uma análise cuidada permite verificar, contudo, que esta volatilidade acrescida é apenas uma consequência do facto da duração ser medida em termos relativos e não em termos absolutos. // Como veremos no ponto 4.1.5., no contexto da estratégia de imunização, o risco de taxa de juro não pode ser nunca dissociado da percepção que dele tem o detentor da obrigação, nomeadamente por comparação com o seu HTI, ou atendendo às responsabilidades futuras por satisfazer. Neste sentido, embora não haja dúvida sobre o impacto que o pagamento dos cupões exerce sobre a duração (uma subida), para o investidor aquilo que importa é a duração da sua carteira, e esta não se altera com o pagamento dos cupões. A razão é simples: a carteira passa a incluir não apenas a obrigação, mas também liquidez que, como vimos, tem uma duração nula. É óbvio que, tal como teremos oportunidade de realçar mais adiante, o pagamento dos cupões exige uma reacção por parte do gestor da carteira, reajustando a composição do seu investimento por forma a manter o *match* entre a duração o HTI. //

Para eliminar as descontinuidades provocadas pelo pagamento dos cupões, sempre indesejáveis quando é necessário, por exemplo, construir séries temporais com os valores da duração de uma obrigação para posterior tratamento econométrico, é possível recorrer às soluções avançadas por Garbade (1984)⁴⁸ e Burger (1987).

Para além dos três determinantes já analisados, Douglas (1990), Ho (1990) e Grantier (1988) identificam outras características, específicas das emissões obrigacionistas, susceptíveis de influenciar a sua duração (e convexidade). Referimo-nos, em concreto, à existência de cláusulas de reembolso antecipado (*call provisions*), à existência de um fundo de absorção (*sinking fund*) e, por último, à existência de risco de crédito/liquidez.⁴⁹

4.1.4. Cálculo da Duração de uma Carteira

A generalidade das estratégias de risco de taxa de juro é delineada tendo em conta carteiras de obrigações e não empréstimos considerados individualmente. Por esta razão, torna-se imperioso proceder ao cálculo da duração de uma carteira. O cálculo da duração de uma carteira, D_P , obedece aos mesmos princípios que o de uma obrigação

(⁴⁸) A solução proposta por Garbade (1984) consiste em usar uma expressão semelhante à apresentada em (4.3), com a diferença de que no denominador da fracção se considera a cotação da obrigação acrescida do valor médio do juro corrido entre duas datas de pagamento de cupão. A solução de Burger (1987) passa por excluir do denominador de (4.3) o juro corrido e considerar apenas a cotação da obrigação. À definição de duração desta forma obtida chama o autor *duração de capital*, por contraposição à noção de *duração global* representada por (4.3).

(⁴⁹) A existência de *call provisions* reduz o valor da duração, uma vez que diminui o intervalo de tempo durante o qual o empréstimo pode não ser pago. Impacto análogo é produzido pela existência de um *sinking fund*, com a diferença de que neste caso a redução da maturidade média é uma consequência da circunstância do investidor receber parte do valor nominal durante o período de vida da obrigação, e não integralmente no vencimento, como acontece quando o reembolso é *in fine*. A existência de risco de crédito e/ou de risco de liquidez leva os investidores a exigir um prémio (*spread*) sobre a taxa de juro sem risco, o que reduz obviamente a duração da obrigação.

individual.⁵⁰ Consideremos uma carteira, $B_P(i) = \sum_{k=1}^J n_k B_k(i)$, constituída por J empréstimos obrigacionistas distintos, onde n_k e B_k representam a quantidade detida da obrigação k , e o seu preço, respectivamente. Derivando $B_P(i)$ com respeito à taxa de juro, prova-se⁵¹ que a *duração de uma carteira* de obrigações é dada por:

$$D_P = \sum_{k=1}^J w_k D_k, \text{ onde } w_k = \frac{n_k B_k}{B_P} \text{ e } \sum_{k=1}^J w_k = 1 \quad (4.9)$$

onde D_k representa a duração da k ésima obrigação. Em suma, a duração de uma carteira não é mais do que uma média ponderada das durações das obrigações que a compõem.

4.1.5. Estratégia de Imunização

*«I use the word immunization to signify the investment of the assets in such a way that the existing business is immune to a general change in the rate of interest».*⁵²

O termo *imunização* foi introduzido por Redington (1952) para designar, no contexto das empresas de seguros (ramo vida), o conjunto dos procedimentos de gestão de activos e passivos que permitia às instituições uma protecção contra o risco de modificações na taxa de juro. Por protecção entendia Redington a necessidade de assegurar que o valor dos activos fosse, em qualquer cenário de taxas de juro, suficiente

(⁵⁰) Apesar de, como vimos, o cálculo da duração de uma carteira não apresentar especiais problemas, algumas cautelas devem ser tomadas em termos computacionais. A principal prende-se, no modelo de Macaulay, com a obrigatoriedade de a TRA exibida pelas diferentes obrigações que compõem a carteira ser idêntica, por forma a que a agregação das durações individuais faça sentido. De facto, do ponto de vista teórico (e também prático), é incorrecto somar durações de obrigações cujo preço é determinado considerando diferentes EPI's. Refira-se, a este propósito, que o problema da imunização de carteiras na presença de múltiplas EPI's (devido, por exemplo, à existência de risco de crédito) é analisado em detalhe por Bierwag *et al.* (1992), e por Nawalkha e Lacey (1992).

(⁵¹) Bierwag *et al.* (1990) e Bierwag (1987) discutem de forma pormenorizada os aspectos críticos relacionados com o cálculo de várias medidas de duração para uma carteira de obrigações.

(⁵²) Redington (*op. cit.*, pp. 289)

para cobrir as responsabilidades futuras da empresa garantindo, desta forma, a sua solvabilidade.⁵³ O interesse pela teoria da imunização só seria reanimado após os trabalhos empíricos de Fisher e Weil (1971). Estes autores sugerem duas modificações principais à metodologia proposta por Redington. Em primeiro lugar admitem que as responsabilidades do investidor se resumem a um único pagamento a realizar em data futura (no HTI)⁵⁴, pelo que centram a sua análise nas condições necessárias para que o valor terminal de uma carteira de obrigações seja, independentemente dos movimentos de taxa de juro que venham a ocorrer, suficiente para fazer face a esse encargo.⁵⁵

Em segundo lugar os autores utilizam a EPTJ para derivar a sua medida de duração, e assumem que esta é governada pela teoria das expectativas puras para obter uma estimativa, à priori, do retorno esperado para o HTI. Dito de outro modo, a estratégia que permite obter, no período correspondente ao HTI, um retorno no mínimo igual ao retorno *prometido* (ou esperado) é designada por estratégia de imunização⁵⁶.

(53) A solução passava, segundo o autor, pela escolha dos activos e dos passivos de modo a que os seus respectivos *termos médios* (durações) fossem iguais, respeitando determinadas condições de segunda ordem. O autor referia-se, especificamente, à necessidade da convexidade (ou a dispersão) dos activos ser superior à convexidade dos passivos. A explicação detalhada do modelo de imunização de Redington no contexto da cobertura do risco de taxa de juro por parte das empresas em geral, e das instituições financeiras em particular, será efectuada no capítulo 10.

(54) O tempo que medeia até essa data futura é designado por horizonte temporal de investimento (HTI). Assume-se que o HTI se situa entre as datas de vencimento das obrigações com maturidade mais curta e mais longa disponíveis no mercado.

(55) Para mais detalhes sobre o modelo de duração imunizante de Fisher e Weil veja-se o ponto 4.2.1.

(56) Bierwag *et al.* (1983a) defendem a existência de duas formas de imunização para salientar a possibilidade de os dois objectivos inerentes à estratégia (solvabilidade das instituições e obtenção de um retorno no mínimo igual ao esperado) serem incompatíveis: uma “*forma-forte*”, correspondente aos casos em que os pagamentos futuros são efectuados nas datas inicialmente previstas, e nos quais a solvabilidade das instituições está assegurada e o investimento proporciona o retorno esperado; e uma “*forma-fraca*”, referente aos casos em que os pagamentos futuros são feitos em datas distintas das previstas, e nos quais a solvabilidade está assegurada mas o retorno realizado pode diferir do retorno esperado. Deve salientar-se, a este propósito, que Redington se preocupou claramente com a forma-fraca de imunização, enquanto Fisher e Weil dedicaram especial atenção à forma-forte da estratégia.

Bierwag e Khang (1979) provam, sob a hipótese de que os choques sobre a EPTJ são do tipo paralelo, que a estratégia de imunização é uma estratégia “*maxmin*”. Por outras palavras, a estratégia de imunização, formulada em termos de um problema de optimização multiperíodo, produz uma carteira de obrigações diversificada que maximiza a taxa de retorno mínima esperada do investimento. Estes autores demonstram ainda que a estratégia de imunização elimina o risco de perda.⁵⁷

Bierwag *et al.* (1981) defendem que o risco de taxa de juro de carteiras obrigacionistas é uma função, não apenas das suas propriedades intrínsecas, designadamente da sua duração, mas também das características do próprio investidor, mais concretamente do seu HTI. Advogam ainda que as medidas de risco (durações) calculadas para um dado HTI, e considerando um determinado processo estocástico para a EPTJ, não têm significado para investidores com distintos horizontes de investimento.⁵⁸

(57) Prisman (1986) amplifica as conclusões de Bierwag e Khang utilizando a teoria geral dos *lagrangeanos* e introduz o *problema dual* na formulação da estratégia de imunização. Esta reformulação permite determinar os choques sobre a EPTJ que minimizam a taxa de retorno máxima para a carteira. Os preços sombra do problema dual não são mais do que as soluções óptimas do problema *maxmin*. Prisman enumera ainda as condições necessárias para que as estratégias de duração e *maxmin* possam ser consideradas idênticas, num contexto em que o retorno do investimento está sujeito ao pagamento de impostos. Conclui que, nesta situação, a condição de duração ($D = HTI$) não é suficiente para garantir a imunização, e que restrições adicionais devem ser colocadas por forma a que a carteira possa considerar-se imunizada. Bowden (1997) defende que os conceitos de imunização e *maxmin* não são equivalentes na maioria dos modelos de duração. Balbás e Ibáñez (1998) demonstram que existe sempre uma carteira *maxmin* num modelo de imunização, e provam que a carteira *maxmin* só é uma carteira imunizada se a implementação da estratégia for possível. Ghezzi (1999) reformula a estratégia de imunização em termos de um problema de controlo óptimo, onde o objectivo é, uma vez mais, o de maximizar o valor final do investimento nas condições criadas pelo pior cenário esperado para as taxas de juro.

(58) Os argumentos apresentados para sustentar esta posição assentam, por um lado, na relação de dependência que existe entre a medida de duração utilizada na estratégia de imunização e o processo estocástico que governa as taxas de juro. Reportam, por outro, ao facto de risco e retorno de uma carteira dependerem das características do mercado (reflectidas no processo estocástico das taxas de juro), e da capacidade que os investidores revelam para identificar a direcção e a dimensão dos choques sobre a EPTJ. Atestam, por último, que o risco do investimento depende do HTI, sendo muito pouco provável que todos os investidores tenham o mesmo HTI.

Concluem, por último, que não existem estimativas universais para o risco de taxa de juro de uma carteira de obrigações.⁵⁹

A estratégia de imunização pressupõe um compromisso entre as propriedades da carteira (duração) e as características do investidor (HTI) explorando, especificamente, a relação inversa que existe entre as duas componentes do risco de taxa de juro (*risco de preço* e *risco de reinvestimento*), na eventualidade de ocorrerem modificações no nível da EPIJ.⁶⁰ O quadro 4.2 resume os tipos de risco a que o investidor está sujeito adquirindo obrigações de cupão zero ou obrigações clássicas, atendendo às relações que é possível celebrar entre a duração da carteira (ou da obrigação) e o HTI.

Quadro 4.2: Duração da Carteira, HTI, e Riscos de Preço e Reinvestimento

Risco	Obrigações					
	Cupão Zero			Clássicas		
	$H > T$	$H = T$	$H < T$	$H > D$	$H = D$	$H < D$
Reinvestimento	●			●	●	
Preço			●		●	●

Notas: T e D denotam, respectivamente, maturidade e a duração da obrigação, enquanto que H simboliza o HTI.

⁽⁵⁹⁾ Ainda assim, e tal como o demonstram, entre outros, Babcock (1984) e Kaufman (1978), é possível construir uma fronteira eficiente para as combinações de risco e retorno de uma carteira, assumindo uma determinada distribuição de probabilidades sobre a direcção e a dimensão dos choques esperados sobre a taxa de juro. Combinando esta fronteira eficiente com curvas de indiferença que representem a atitude dos diferentes investidores em relação ao risco, é possível identificar o nível óptimo de duração para cada carteira. Babcock (1984) deriva mesmo uma relação linear entre o retorno esperado da carteira, $E(r)$, a taxa de juro sem risco, r , a duração e o HTI:

$$E(r) = r + \left(1 - \frac{D}{H}\right)dr$$

⁽⁶⁰⁾ O *risco de preço* (também designado por *risco de capital* ou *risco de mercado*) deriva da relação inversa existente entre os preços dos activos financeiros e a sua TRA, e corresponde à possibilidade de as alterações nas taxas de juro afectarem negativamente o valor da carteira no HTI. O *risco de reinvestimento* configura um cenário em que o investidor é forçado a reinvestir os cupões libertados a taxas diferentes daquelas que se verificavam no momento da realização do investimento.

Este quadro indica, claramente, que a única forma de contornar a exposição a uma das (ou às duas) componentes do risco de taxa de juro e, simultaneamente, assegurar uma taxa de retorno igual à rendibilidade esperada, envolve a aquisição de uma obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTI. Só neste caso, e independentemente dos movimentos registados na taxa de juro durante o período do investimento, o investidor receberá um montante conhecido, correspondente ao valor de reembolso da obrigação.⁶¹

Por motivos que se prendem, quer com a incompletude dos mercados, ou seja, com a inexistência de obrigações de cupão zero para todas as maturidades desejadas, quer com a presença de custos de transacção ou com a falta de liquidez nos mercados, os investidores são normalmente forçados a optar por uma estratégia de protecção face ao risco de taxa de juro que, embora menos precisa⁶², consegue, em determinadas circunstâncias, firmar um valor mínimo para o retorno realizado (ou para o valor terminal) da carteira. Esta estratégia é conhecida, desde os trabalhos de Redington, por *estratégia de imunização*.

Para as obrigações clássicas a maturidade não constitui, tal como defende Macaulay (1938), uma medida adequada do perfil de risco da carteira, e deve ser substituída pela duração. Com base em argumentos semelhantes aos aludidos para as obrigações de

(⁶¹) Nos casos em que o HTI é superior à maturidade da obrigação de cupão zero o investidor está exposto ao risco de reinvestimento, uma vez que está colocado na contingência de ter que reinvestir o capital, no período que medeia entre T e H , a uma taxa de juro inferior à inicial. Se, pelo contrário, o HTI for inferior à maturidade, o investidor incorre em risco de perdas de capital, dado que será forçado a alienar o título antes de alcançada a sua maturidade. Se, por exemplo, a taxa de juro tiver subido entretanto, provocando uma descida no preço das obrigações, o investidor é obrigado a fechar a sua posição por um valor inferior ao previsto.

(⁶²) Por imprecisão subentende-se, neste contexto, a circunstância da estratégia de imunização ser incapaz de eliminar, totalmente, a exposição às componentes do risco de taxa de juro.

cupão zero, os detentores de obrigações clássicas estão invariavelmente sujeitos, ou ao risco de reinvestimento dos cupões, ou ao risco de preço, ou a ambos, e isto consoante a o HTI seja, respectivamente, maior, menor, ou igual à duração da carteira⁶³.

Todavia, as duas componentes do risco de taxa de juro respondem de forma antagónica às variações na taxa de juro. Um(a) aumento (diminuição) nas taxas de juro reduz (aumenta) o valor de mercado das obrigações, mas aumenta (diminui) o retorno proveniente do reinvestimento dos cupões a taxas mais (menos) favoráveis. É justamente na exploração destes comportamentos antagónicos que reside a essência do mecanismo de imunização. A imunização define-se, segundo Fisher e Weil (*op. cit.*, pp. 415), da seguinte forma: «*A portfolio of investments in bonds is immunized for a holding period if its value at the end of the holding period, regardless of the course of interest rates during the holding period, must be at least as large as it would have been had the interest-rate function been constant throughout the holding period*». A imunização é conseguida igualando a duração da carteira ao HTI⁶⁴.

Para demonstrarmos formalmente a *condição de imunização* examinamos, em seguida, o valor da posição do investidor no final do seu HTI, que designamos por B_H .

Representemos por B_0 o valor inicial ($t = 0$) de uma carteira constituída por uma ou

(⁶³) Em termos mais rigorosos, quando afirmamos que uma carteira de obrigações clássicas com uma duração superior (inferior) ao HTI está exposta ao risco de preço (reinvestimento) pretendemos, de facto, expressar a ideia de que o efeito dominante (líquido) de uma modificação nas taxas de juro sobre a taxa de retorno realizada pela carteira, ao longo do HTI, será dado pela componente preço (reinvestimento dos cupões).

(⁶⁴) A elegância da estratégia de imunização, que explica em grande medida o seu sucesso, resulta do facto de uma carteira imunizada poder ser considerada funcionalmente equivalente (replica) a uma obrigação de cupão zero com maturidade coincidente com o HTI (ou com o vencimento da responsabilidade futura). Saliente-se, contudo, que esta afirmação apenas é verdadeira se negligenciarmos a importância do fenómeno da convexidade.

mais obrigações, e por T a maturidade do empréstimo com vencimento mais distante.

O valor capitalizado dessa carteira no momento H é dado por:

$$B_H = B(i)(1+i)^H \quad (4.10)$$

Das condições de 1ª ordem para a obtenção de um mínimo resulta a seguinte equação:

$$\frac{dB_H}{di} = [B(i)(1+i)^{H-1}] \cdot (H - D) \quad (4.11)$$

Assevera-se assim que, verificadas as condições de 2ª ordem, a selecção de uma carteira de obrigações com duração exactamente igual ao HTI ($D = H$) torna o valor final do investimento independente do nível de taxas de juro ($dB_H/di = 0$).⁶⁵ Apuradas as condições necessárias à existência de um mínimo, é ainda imprescindível certificar a sua *suficiência*. Para tal recorremos, por uma questão de simplificação, à transformação logarítmica de B_H , isto é, a $\ln B_H = \ln B(i) + H \ln(1+i)$. Da 2ª derivada de $\ln B_H$, avaliada no ponto em que $D = H$, obtém-se, após alguma *culinária*, a seguinte equação:

$$\frac{d^2 \ln B_H}{di^2} = -\frac{1}{(1+i)} \frac{dD}{di} = \frac{S}{(1+i)^2} > 0 \quad (4.12)$$

onde, na última passagem, recuperámos a expressão de dD/di obtida em (4.8). Atesta-se, deste modo, que o cumprimento da condição de imunização é suficiente para garantir que B_H e r_H têm um valor mínimo no ponto $i = i_0$.

(⁶⁵) Acresce ainda que, nestas condições, o retorno realizado pela carteira, r_H , tem um valor mínimo no ponto correspondente à taxa de juro inicial, isto é, $r_{H=D} = i_0$. A demonstração analítica desta afirmação é bastante simples se nos recordarmos que a taxa de retorno realizada pela carteira no momento H é tal que $B_0(1+r_H)^H = B(i)(1+i)^H = B_H$. Resolvendo em ordem a r_H ficamos com $r_H = (B_H/B_0)^{1/H} - 1$. Minimizar r_H equivale a minimizar qualquer uma das suas transformações, por exemplo B_H . Desta operação concluímos que um mínimo é obtido se a duração, avaliada à taxa de juro inicial, for igual ao HTI. Dado que este mínimo ocorre precisamente no ponto $i = i_0$, a taxa de retorno correspondente será então $r_{H=D} = i_0$.

A estratégia de imunização é, grosso modo, uma estratégia passiva de gestão do risco de taxa de juro e assenta, na sua formulação mais simples, no pressuposto de que ocorre um único choque aleatório sobre as taxas de juro durante o HTI. Considera ainda que as responsabilidades do investidor se resumem a um único pagamento a realizar no futuro.⁶⁶

A estratégia pode, no entanto, ser facilmente generalizada a um contexto dinâmico em que ocorrem múltiplos choques de taxa de juro. Nestes casos, o sucesso da imunização envolve um reajustamento frequente da composição da carteira de modo a assegurar que, em cada momento, a sua duração é igual ao período remanescente do HTI.⁶⁷

Deve realçar-se, neste ponto, que o ajustamento regular da composição da carteira é necessário mesmo que não ocorram quaisquer modificações nas taxas de juro. Tal é assim porquanto a passagem do tempo exerce efeitos assimétricos sobre a duração e sobre o HTI. Este fenómeno, posto em evidência pela propriedade 7 da duração, declara-se pelo facto da passagem do tempo exercer um efeito menos acentuado na redução da duração da carteira do que na redução do HTI, o que torna a carteira *longa* relativamente ao HTI.

Em resultado da necessidade de recompor frequentemente a composição da carteira, o investidor é forçado a suportar um montante significativo de custos de transacção. Na

(⁶⁶) A determinação das condições de imunização num contexto em que o investidor deve fazer face a múltiplos pagamentos durante o HTI será efectuada no capítulo 10.

(⁶⁷) Existem múltiplas formas de reajustar a composição da carteira com vista a manter o nível de duração desejado. A primeira consiste em reinvestir, de forma adequada, os cash flows recebidos nas obrigações que já integram a carteira, ou em novos empréstimos. Uma segunda hipótese passa por alterar a própria composição da carteira. Uma terceira consiste em assumir posições em activos derivados (futuros sobre obrigações, opções sobre obrigações, etc.).

presença deste factor a verificação permanente da condição de imunização torna-se insuficiente para garantir a obtenção da taxa de retorno esperada.⁶⁸

Lee e Cho (1992) avaliaram os efeitos provocados pela existência de custos de transacção no problema do reajustamento da carteira. Os autores concluem que os desvios entre o retorno realizado e o retorno esperado da carteira são explicados, quer pela diferença entre a duração da carteira e o HTI, quer pelos custos de transacção. Os autores mostraram ainda que existe um claro *trade-off* entre a qualidade da imunização (medida pelo *mismatch* de duração) e o valor dos custos de transacção.⁶⁹

4.1.6. Estratégia de Cobertura (Hedging) do Risco de Taxa de Juro

Como vimos anteriormente a estratégia de imunização é estruturada por forma a proteger o valor da carteira contra flutuações nas taxas de juro durante um HTI

(⁶⁸) A importância dos custos de transacção é ainda mais premente no contexto da denominada *forma-fracca de imunização*, dado que as alterações inesperadas nos montantes e nos momentos em que os cash flows ocorrem obriga a recomposições adicionais da carteira. Refira-se, a propósito, que o investidor pode sempre, se assim o entender, preferir ajustar de forma menos frequente a composição da sua carteira reduzindo, deste modo, os custos de transacção. Ao fazê-lo deve contudo estar consciente de que a qualidade da imunização diminui, e que a manutenção por períodos prolongados de um desajustamento (*mismatch*) entre a duração e o HTI sujeita o investimento ao risco de obter um retorno aquém do esperado. O investidor pode, inclusive, desejar tirar partido do *trade-off* existente entre a qualidade da imunização e os custos de transacção, formulando expectativas relativamente à evolução futura das taxas de juro, e adoptando estratégias activas de imunização e/ou cobertura. Para mais detalhes sobre este assunto veja-se o ponto 4.1.6. e o capítulo 10.

(⁶⁹) Maloney e Logue (1989) compararam, através de uma simulação, a performance exibida por várias estratégias de gestão de risco de taxa de juro (nomeadamente estratégias de dedicação e de imunização) no contexto do financiamento das responsabilidades futuras de um fundo de pensões, e na presença de custos de transacção. Entre as suas principais conclusões encontra-se aquela que sustenta que a opção pela estratégia de imunização, em detrimento da estratégia de dedicação, com base no argumento de que a última exige custos de financiamento iniciais superiores, pode revelar-se contraproducente. A razão é simples: a estratégia de imunização exige reajustamentos frequentes na composição da carteira que se traduzem, na presença de custos de transacção, em custos de gestão elevados que podem, nalguns casos, ultrapassar os custos de sobrefinanciamento implícitos na estratégia de dedicação.

relativamente longo: o tempo necessário à compensação dos efeitos resultantes do risco de reinvestimento e do risco de capital. Em vez de enveredar por este caminho, o investidor pode estar simplesmente interessado em minimizar (ou inclusive eliminar) a flutuação do valor das suas posições nos mercados à vista. Para cobrir o risco de oscilações adversas nos factores de risco subjacente⁷⁰ o gestor da carteira (*hedger*) assume, na maioria dos casos, posições contrárias nos mercados à vista e/ou nos mercados de derivados.⁷¹

Os fundamentos desta técnica, habitualmente designada por *estratégia de cobertura* ou de *hedging*, são apresentados no **Anexo 1**. No ponto seguinte exemplificamos as suas potencialidades (e limitações) no contexto do modelo de duração de Macaulay.

4.1.6.1. Hedging no Modelo de Duração de Macaulay

O modelo de Macaulay baseia-se na hipótese de que a EPIJ é horizontal, ou seja, resume a estrutura de risco da carteira a um único factor – a TRA. Neste contexto, temos que $a_t \equiv i_t$. Aplicando a metodologia descrita no Anexo 1, a carteira (q_t^1, q_t^2) que

(⁷⁰) Por factores de risco designamos as variáveis que, em cada momento, determinam o valor do investimento e a sua estrutura de risco. Dependendo do modelo que estamos a analisar, estes factores podem ser, por exemplo, as taxas de juro, os preços das obrigações, os parâmetros de uma função de taxa de juro, ou os parâmetros de uma função de actualização.

(⁷¹) A título de exemplo, um investidor que possui uma carteira de títulos de taxa fixa no mercado à vista (posição longa) está exposto ao risco de oscilações nas taxas de juro (mais concretamente ao risco de aumento das taxas de juro), com as previsíveis consequências ao nível da redução do valor de mercado da carteira. Nesta situação, o *hedger* pode, por exemplo, adoptar uma estratégia de cobertura adquirindo uma posição oposta (curta) no mercado de futuros, ou seja, encetando um denominado «short hedge». Em termos operacionais, deveria para tal vender contratos de futuros, procurando desta forma compensar as eventuais perdas no mercado à vista com ganhos no mercado de futuros. Não constituindo a temática da cobertura do risco de taxa de juro usados derivados o objectivo central do nosso trabalho, centraremos a nossa análise nas estratégias de cobertura que envolvem posições (curtas ou longas) nos mercados à vista. A metodologia é, todavia, bastante genérica e acomoda perfeitamente posições em derivados.

protege o investidor contra efeitos de 1ª ordem e, simultaneamente, respeita a condição de autofinanciamento, é aquela que satisfaz o seguinte sistema de equações:

$$F_t \cdot Q_t = V_t \quad (4.13)$$

onde:

$$F_t = \begin{bmatrix} f_t^1 & f_t^2 \\ -D_m^1 f_t^1 & -D_m^2 f_t^2 \end{bmatrix} \quad Q_t = \begin{bmatrix} q_t^1 \\ q_t^2 \end{bmatrix} \quad V_t = \begin{bmatrix} V_t \\ D_m V_t \end{bmatrix}$$

e onde D_m^j ($j=1,2$) e D_m representam, respectivamente, a duração modificada do $j^{\text{ésimo}}$ instrumento de cobertura e da carteira a ser coberta.⁷² Se admitirmos que a matriz F_t é invertível⁷³, a solução óptima virá dada por:

$$Q_t = (F_t)^{-1} \cdot V_t \quad (4.14)$$

Conforme se constata, no modelo de Macaulay o único indicador de risco relevante para a determinação da carteira de cobertura óptima corresponde à medida de sensibilidade D_m .

⌚ A eficácia da estratégia de cobertura (e também da estratégia de imunização) assente no modelo de Macaulay é condicionada pelo realismo (ou a falta dele) de duas hipóteses cruciais. A primeira estabelece que a volatilidade de todos os activos que compõem a carteira deve ser idêntica. A segunda, comum a todos os modelos unifactor, impõe uma estrutura de correlação perfeita para as variações nas TRA de todos os activos. Ambas

(⁷²) Registe-se que o facto de, na escolha da carteira óptima, termos recorrido ao conceito de duração modificada como medida do risco de taxa de juro não invalida que, com as necessárias adaptações, outras medidas de risco possam ser usadas.

(⁷³) Ou seja, que nenhum dos preços dos activos que integram a carteira pode ser obtido através de uma combinação linear dos restantes.

as hipóteses decorrem da presunção segundo a qual a EPTJ é horizontal e apenas sofre choques paralelos.

Para escarpelizarmos, em termos mais formais, a influência destas hipóteses na eficácia da estratégia de cobertura, seguimos Garbade (1986a) e Carcano e Foresi (1997) e usamos a um exemplo. Considere-se um investidor que pretende cobrir o risco de uma posição longa de 1 unidade no activo A , tomando posições curtas nos activos A_1 e A_2 , nas quantidades q_1 e $(1 - q_1)$, respectivamente. O valor da sua carteira B_P é igual a:

$$B_P = A - q_1 A_1 - (1 - q_1) A_2 \quad (4.15)$$

Admitamos agora que o objectivo central do investidor passa pela minimização do risco da carteira, e que como medida de risco se evoca, como é habitual, a sua variância (ou desvio padrão), σ^2 . A variação no valor da carteira em consequência de um choque de taxa de juro que afecta todas as maturidades pode ser aproximada por:

$$\Delta B_P = -D_A \Delta i_A + q_1 D_1 \Delta i_1 + (1 - q_1) D_2 \Delta i_2 \quad (4.16)$$

onde D_j , $j \in (A, 1, 2)$, simboliza agora o conceito de *dollar duration*⁷⁴, e Δi_j denota as variações não antecipadas sobre as taxas de juro. Das condições de 1ª ordem para a minimização da variância da carteira obtém-se o seguinte valor óptimo para q_1 :

$$q_1 = \frac{D_A \sigma_A (\rho_{A,2} D_2 \sigma_2 - \rho_{A,1} D_1 \sigma_1) - D_2 \sigma_2 (D_2 \sigma_2 - \rho_{1,2} D_1 \sigma_1)}{D_1 \sigma_1 (\rho_{1,2} D_2 \sigma_2 - D_1 \sigma_1) - D_2 \sigma_2 (D_2 \sigma_2 - \rho_{1,2} D_1 \sigma_1)} \quad (4.17)$$

⁽⁷⁴⁾ Este conceito corresponde ao produto do preço de mercado do activo pela sua duração modificada, i.e., $D_m' \times A_j$. Para mais detalhes veja-se, por exemplo, Fabozzi (2000, *op. cit.*, pp. 66).

onde $\rho_{j,k}$, $j,k \in (A,1,2)$, representa o coeficiente de correlação entre as variações nas taxas de juro. Apelando, por fim, à hipótese transversal a todos os modelos de factor único (correlação perfeita, i.e., $\rho_{j,k} = 1$) e ao pressuposto base do modelo de Macaulay (volatilidade igual para todos os prazos, i.e., $\sigma_A = \sigma_1 = \sigma_2$), demonstra-se que o valor óptimo de q_1 será dado simplesmente por:

$$q_1 = \frac{(D_A - D_2)}{(D_1 - D_2)} \quad (4.18)$$

Ou, de forma equivalente, por:

$$D_A = q_1 D_1 + (1 - q_1) D_2 \quad (4.19)$$

A equação (4.19) traduz a já familiar restrição de imunização. Comprova-se, assim, que a estratégia de *hedging* no contexto do modelo de Macaulay apenas pode ser equacionada como um caso particular da estratégia, e no pressuposto de que as hipóteses acima mencionadas são válidas.

Para além das limitações já mencionadas, Garbade (1986a) salienta dois aspectos a ter em conta na implementação da estratégia de cobertura. O primeiro refere-se ao facto dos níveis óptimos de cobertura não serem *simétricos*.⁷⁵ O segundo aspecto corresponde à possibilidade dos níveis óptimos de cobertura não serem *transitivos*.⁷⁶ De facto, basta que as correlações não sejam perfeitas para que exista alguma independência entre as variações nas taxas de juro e, desta forma, duas obrigações não possam ser consideradas substitutos perfeitos.

(⁷⁵) Esta conclusão contraria a intuição geral segundo a qual a composição da carteira não deveria depender da distinção efectuada entre posição a cobrir e carteira de cobertura.

(⁷⁶) Citando Garbade (1986a, pp. 245), «[...] *bond position C may not be an optimal hedge of position A even though it is an optimal hedge of position B and B is an optimal hedge of position A*».

4.1.6.2. Estratégias Activas de Hedging: Estratégia Barbell-Bullet

As estratégias de cobertura e imunização convencionais (e também a estratégia de indexação) constituem procedimentos de gestão do risco de taxa de juro que pressupõem um comportamento passivo por parte do investidor. Em alternativa, os gestores podem desejar obter um retorno mais elevado para as suas carteiras, seja apostando em determinadas previsões sobre a evolução das taxas de juro, seja tirando partido de eventuais situações de ineficiência no mercado. Para ilustrar o funcionamento das estratégias activas de *hedging*, seguimos Garbade (1986a) e Martellini e Priaulet (2001) na exposição da conhecida *estratégia Barbell-Bullet*.⁷⁷

A estratégia *barbell-bullet* é desenhada com o intuito de tirar partido de deformações na curva de TRA. Envolve a combinação de uma carteira *barbell* com uma carteira *bullet*, tomando posições nos segmentos extremos⁷⁸ da curva de taxas, e a manutenção de uma posição intermédia inalterada.⁷⁹ O quadro 4.3 resume os elementos necessários à implementação da estratégia.

Quadro 4.3: Elementos Necessários à Implementação da Estratégia Barbell-Bullet

Segmento da Curva de Taxas	Preço da Obrigação	Quantidade	Duração Modificada
Curto	B_S	q_S	D_S
Médio	B_m	$q_m = \alpha$	D_m
Longo	B_L	q_L	D_L

Nota: Os preços das obrigações incluem o juro corrido.

⁽⁷⁷⁾ Garbade (1986a) apelida esta estratégia de “*Butterfly Trade*”.

⁽⁷⁸⁾ Os segmentos extremos da curva são representados por duas obrigações (uma de curto prazo e uma de longo prazo) respeitando a habitual definição da carteira “*barbell*”. O segmento médio é representado por uma obrigação com maturidade intermédia.

⁽⁷⁹⁾ Se o investidor antecipa um decréscimo (aumento) na inclinação na EPTJ, a opção correcta será a de vender (comprar) a posição intermédia e comprar (vender) as posições extremas.

A operacionalização da estratégia pressupõe a fixação, no momento inicial, da quantidade da obrigação intermédia α a incluir na carteira. Implica ainda a sua estruturação de modo a que o custo inicial do investimento seja nulo, e por forma a que o seu valor seja insensível a choques paralelos sobre EPTJ.⁸⁰ Em termos formais, o problema pode ser formulado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} q_S D_S B_S + q_I D_I B_I + \alpha D_m B_m = 0 \\ q_S B_S + q_I B_I + \alpha B_m = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

A resolução deste sistema permite obter as quantidades óptimas q_S e q_I a deter das obrigações de curto e longo prazo, respectivamente. Na eventualidade de as previsões falharem e a curva de taxas experimentar, não uma deformação, mas um choque paralelo significativo, o investidor pode ainda assim tirar partido desse facto desde que garanta que convexidade da carteira global é, no momento inicial, positiva.⁸¹

(Martellini e Priaulet (2001) apresentam duas variantes da estratégia *barbell-bullet* que não requerem a condição inicial de autofinanciamento. A título de exemplo, a determinação da combinação óptima de q_S e q_I pode ser efectuada substituindo a segunda equação em (4.20) por:

$$q_S D_S B_S = q_I D_I B_I = -\frac{\alpha D_m B_m}{2} \quad (4.21)$$

Ou pelo sistema:

⁽⁸⁰⁾ Garbade (1986a) apresenta uma variante da estratégia *barbell-bullet* destinada a proteger a carteira contra choques, não apenas sobre o nível, mas também sobre a inclinação da EPTJ. A estratégia dá pelo nome de *arbitrage butterfly*.

⁽⁸¹⁾ Se todos os participantes no mercado considerarem a convexidade um atributo valioso para a carteira, o investidor deve estar disposto a sacrificar algum retorno por forma a aumentar a sua convexidade. Para mais detalhes sobre o carácter desejável da convexidade veja-se o capítulo 6.

$$\begin{cases} q_s D_s B_s = -\alpha \left(\frac{T_m - T_s}{T_l - T_s} \right) D_m B_m \\ q_l D_l B_l = -\alpha \left(\frac{T_l - T_m}{T_l - T_s} \right) D_m B_m \end{cases} \quad (4.22)$$

onde T_s , T_m e T_l denotam, respectivamente, as maturidades das obrigações de curto, médio e longo prazo. Existem várias técnicas para detectar oportunidades de realização de estratégias *barbell-bullet*. O método convencional consiste no cálculo, para um dado cenário de evolução das taxas de juro, da estimativa do retorno efectivo da estratégia. O método alternativo, aplicável apenas às estratégias definidas segundo (4.21) ou (4.22), consiste na análise histórica dos diferenciais (*spreads*) de taxa de juro entre os diferentes prazos.⁸²

A estimativa dos ganhos e perdas (π) para uma estratégia *barbell-bullet* com idêntica sensibilidade-taxa de juro é fornecida por:

$$\pi = \alpha D_m B_m \Delta i_m + q_s D_s B_s \Delta i_s + q_l D_l B_l \Delta i_l \quad (4.23)$$

onde $\Delta i_k, k \in (s, m, l)$ simboliza o choque sobre a TRA correspondente. Fazendo uso da equação (4.21), a estimativa de π pode ser representada por:

$$\pi = \alpha D_m B_m \left[\Delta i_m - \frac{(\Delta i_s + \Delta i_l)}{2} \right] \quad (4.24)$$

Ou, utilizando a versão alternativa indicada em (4.22), por:

$$\pi = \alpha D_m B_m \left[\Delta i_m - \left(\frac{T_m - T_s}{T_l - T_s} \right) \Delta i_s - \left(\frac{T_l - T_m}{T_l - T_s} \right) \Delta i_l \right] \quad (4.25)$$

⁽⁸²⁾ Esta abordagem apresenta contudo algumas limitações na medida em que negligencia a importância dos cupões recebidos e dos custos de financiamento.

As parcelas entre parêntesis rectos em (4.24) e (4.25) representam diferenciais de taxa de juro. A sua análise histórica fornece pistas importantes na sinalização de oportunidades de realização de estratégias *barbell-bullet*.

4.1.7. Estratégias de Hedging na Presença de Custos de Transacção

Na presença de custos de transacção o ajustamento contínuo da composição da carteira exigido, quer pela verificação permanente da condição de imunização, quer pela manutenção do nível óptimo de cobertura, não pode ser considerado um procedimento óptimo. Torna-se assim necessária a definição de uma disciplina de reajustamento que minimize os desvios das estratégias face aos seus níveis desejados. Inúmeros métodos foram alvitados para solucionar este problema, em especial no contexto da replicagem óptima de activos contingentes. Martellini (2000) agrupa as diferentes estratégias em duas categorias principais: estratégias de base temporal, e estratégias assentes na dimensão dos choques sobre os factores de risco.⁸³

4.1.7.1. Estratégias de Base Temporal

As *estratégias de base temporal* subdividem-se em dois grupos: estratégias de escala única e estratégias multi-escala. As *estratégias de escala única*, introduzidas pelo trabalho de Leland (1985), caracterizam-se pelo facto de preconizarem transacções em intervalos de tempo fixos e igualmente espaçados, isto é, para uma determinada resolução temporal.⁸⁴

⁽⁸³⁾ Para uma análise mais detalhada das implicações que advém da consideração de custos de transacção numa estratégia de cobertura ver, por exemplo, Wilmott (1998).

⁽⁸⁴⁾ Quanto menor for a resolução temporal, tanto maiores serão os custos de transacção.

O modelo de Leland assume que o custo de transacção é proporcional ao valor da transacção, seja ela de compra ou de venda. O autor demonstra que este tipo de estratégias podem não ser óptimas. Em sentido idêntico se pronunciam Hoggard *et al.* (1992), tomando como referência um modelo onde se sustenta igualmente um reajustamento da carteira em intervalos de tempo fixos, mas onde se considera uma estrutura de custos de transacção mais complexa.⁸⁵

Martellini (2000) propôs recentemente a utilização de *estratégias multi-escala* (mais propriamente estratégias de escala dupla). O autor sugere uma disciplina que envolve reajustamentos parciais da carteira em cada resolução temporal. Apesar da estratégia não eliminar o clássico conflito entre a qualidade da cobertura e o seu custo, o autor argumenta que ela gera benefícios, em termos do binómio retorno-variância, superiores aos proporcionados pelas estratégias de escala única.

A vantagem relativa das estratégias multi-escala é explicada pelo autor com base no chamado *efeito de diversificação tempo-escala*. Segundo este princípio, num contexto dinâmico os benefícios da diversificação podem ser usufruídos sem que para tal seja necessário transaccionar diferentes activos, bastando apenas que se usem diferentes escalas temporais para transaccionar o mesmo activo.⁸⁶

(⁸⁵) Com efeito, a estrutura usada por estes autores inclui custos fixos, custos proporcionais ao volume transaccionado, e custos proporcionais ao valor da transacção.

(⁸⁶) A vantagem relativa dos modelos multi-escala sobre os modelos de escala única é percebida, quer pelo facto de os primeiros providenciarem um melhor nível de cobertura para o mesmo montante de custos quer, de forma equivalente, pelo facto de estes serem menos dispendiosos (geram menos transacções) para o mesmo nível de cobertura. Para além destes benefícios as estratégias multi-escala são de fácil implementação quando comparadas, por exemplo, com as estratégias baseadas em problemas de controlo óptimo (Hodges e Neuberger (1989)), uma vez que não requerem a monitorização permanente do mercado.

4.1.7.2. Estratégias Baseadas na Dimensão dos Choques Sobre os Factores de Risco

Em alternativa às estratégias de base temporal Whalley e Wilmott (1993), Henrotte (1993) e Toft (1996), entre outros, testam estratégias que envolvem, em cada momento, o reajustamento da carteira apenas nos casos em que a variação percentual no factor de risco subjacente ultrapassa um valor pré-defenido pelo investidor. A dimensão do choque admissível delimita *bandas de cobertura* e depende, naturalmente, do grau de aversão ao risco do investidor, sendo que as suas preferências são introduzidas explicitamente na análise.⁸⁷

4.1.8. Aplicação do Modelo às Obrigações Denominadas em Moeda Estrangeira

As posições não cobertas em obrigações denominadas em moeda estrangeira estão expostas, não apenas aos riscos de crédito e de taxa de juro, mas também ao risco de taxa de câmbio. O risco de taxa de câmbio manifesta-se, neste caso, de duas formas. Uma primeira, imediata, associada ao facto dos cupões e o valor de reembolso serem pagos em moeda estrangeira. Uma segunda, claramente indirecta, que corresponde à possibilidade das taxas de juro serem, elas próprias, afectadas pelos movimentos no mercado cambial. A problemática da medição do risco para obrigações denominadas em moeda estrangeira é analisada, entre outros, por Dym (1991), Thomas e Willner (1997), Hauser *et al.* (2001) e Murphy e Won (1995).

(⁸⁷) A aplicação prática destes métodos suscita, contudo, alguns problemas. Desde logo a necessidade de especificar uma função utilidade que represente as preferências dos investidores, à qual se junta: (i) o requisito de monitorização permanente do mercado, (ii) os custos computacionais envolvidos na derivação da banda de cobertura e, por fim, (iii) a possibilidade de ocorrerem transacções infinitas nos extremos dos intervalos de cobertura.

Representemos por B o valor de uma obrigação denominada em moeda estrangeira, e por e a taxa de câmbio, medida em termos de unidades de moeda nacional necessárias para adquirir uma unidade de moeda estrangeira (*cotação ao incerto*). O valor da posição em moeda nacional, V , é dado por: $V = eB$. Aplicando logaritmos e diferenciando demonstra-se, fazendo uso da equação (4.5), que o retorno pode ser aproximado por:

$$\frac{dV}{V} \cong -D_m di + \frac{de}{e} \quad (4.26)$$

A variância do retorno gerado pela posição em moeda estrangeira é igual a:

$$Var\left(\frac{dV}{V}\right) = -D_m^2 Var(di) + Var\left(\frac{de}{e}\right) - 2 D_m Cov\left(di, \frac{de}{e}\right) \quad (4.27)$$

A equação (4.27) põe em evidência três fontes de variabilidade para uma posição não coberta⁸⁸ em moeda estrangeira: (i) a duração da obrigação, (ii) a volatilidade (local) da taxa de juro e (iii) a volatilidade da taxa de câmbio. Estudos empíricos⁸⁹ recentes comprovam que a covariância entre as flutuações nas taxas de juro e nas taxas de câmbio é pouco significativa. Assim sendo, conclui-se que, de acordo com (4.27), a adição do elemento risco cambial aumenta o risco global da posição.

Thomas e Willner (1997) desprezam o elemento risco cambial e propõem uma metodologia diferente para calcular a duração de uma carteira de obrigações denominadas em moeda estrangeira. A técnica consiste em ajustar a duração, calculada

(⁸⁸) O risco de posições cobertas em moeda estrangeira (utilizando contratos *forward* de taxa de câmbio) é analisado detalhadamente por Dym (1991). O autor conclui que, nestes casos, o impacto da volatilidade da taxa de juro sobre o risco da obrigação é atenuado pela adopção da estratégia de cobertura, e que o impacto da volatilidade da taxa de câmbio é praticamente eliminado. Ainda assim, a carteira continua a estar exposta, quer à parcela não coberta das variações no preço da obrigação (que resulta de oscilações inesperadas na taxa de juro), quer às oscilações no *spread* entre as taxas *spot* e as taxas *forward* no mercado cambial, esperadas no contexto da paridade coberta de taxas de juro.

(⁸⁹) Vidé Solnik *et al.* (1996), Phoa (2001) e Dym (1991).

com base na taxa de juro de referência para a moeda, por um factor que os autores designam por *Beta País* (β).⁹⁰ Neste caso, a expressão para o cálculo da duração da carteira encontrada em (4.9) é substituída por:

$$D_P = \sum_{k=1}^J w_k \beta_k D_k \quad \text{onde} \quad \beta_k = \frac{\sigma_x}{\sigma_n} \times \rho_x \quad (4.28)$$

e onde σ_x e σ_n representam, respectivamente, a volatilidade (desvio padrão) das variações nas taxas de juro externa e nacional, e ρ_x denota o coeficiente de correlação. Conforme se verifica, o beta do país pode ser decomposto em duas parcelas⁹¹: o termo σ_x/σ_n representa a volatilidade relativa das taxas de juro. Quanto maior (menor) for a volatilidade das taxas de juro externas relativamente às internas, tanto maior (menor) será, *ceteris paribus*, a duração (o risco) da carteira. O termo ρ_x representa, por seu turno, a direcção e a magnitude das relações entre as taxas de juro internas e externas.

Num artigo recente, Hauser *et al.* (2001) generalizam a tradicional teoria da imunização a carteiras constituídas, parcialmente, por obrigações denominadas em moeda estrangeira. Assumindo que, em cada país, a EPTJ é horizontal e apenas está sujeita a choques paralelos, os autores demonstram que as condições de imunização simultânea

⁽⁹⁰⁾ Na terminologia original *country beta*. A utilização do termo beta é atribuída por analogia com a interpretação (e fórmula de cálculo) que é dada a este conceito no contexto do modelo CAPM.

⁽⁹¹⁾ Todas as obrigações denominadas em moeda nacional têm um coeficiente beta igual à unidade, o mesmo não se podendo dizer, regra geral, para as obrigações denominadas em moeda estrangeira. Refira-se ainda que o factor de ajustamento depende apenas da moeda de referência para a obrigação (existe um factor de ajustamento diferente e único para cada moeda), e não de quaisquer outras características intrínsecas do título (por exemplo, da taxa de cupão, da maturidade, etc.). Esta hipótese, algo limitativa, deriva implicitamente da assunção de que os choques sobre a EPTJ são do tipo paralelo. Estudos recentes efectuados por Phoa (2001) com base na metodologia dos componentes principais demonstram que, apesar dos choques paralelos serem dominantes na explicação do risco de taxa de juro, a sua importância relativa não é uniforme entre os vários países. Mais, os choques sobre a inclinação tomam formas diferenciadas em cada país.

(de 1ª e 2ª ordem) contra flutuações nas taxas de juro doméstica e externa pressupõem:

(i) a igualdade entre a duração média⁹² dos activos e dos passivos, (ii) a igualdade entre o valor dos activos e dos passivos denominados em moeda estrangeira, (iii) que a convexidade dos activos deve ser, para cada moeda, superior à convexidade dos passivos.⁹³

4.1.9. Limitações do Modelo de Duração de Macaulay

Pese embora a sua simplicidade e aceitabilidade, o modelo de Macaulay tem sido severamente criticado, quer pelos pressupostos assumidos na derivação do conceito de duração, mais propriamente pela natureza restritiva do processo estocástico que governa as taxas de juro, quer pela sua utilização na implementação de estratégias de imunização.⁹⁴

A primeira, e mais antiga, crítica ao modelo respeita ao facto do conceito de duração a ele associado se basear no pressuposto de que a EPTJ é horizontal (*flat*), ou seja, no facto de este considerar uma única taxa de juro para todas as maturidades. Esta assunção reduz fortemente o poder explicativo da duração de Macaulay enquanto medida do risco de taxa de juro nos casos em que a EPTJ é não horizontal. Esta crítica seria abandonada após os trabalhos de Fisher e Weil (1971).

(92) Calculada fazendo uma média ponderada das durações das posições em moeda nacional e em moeda externa.

(93) As condições de imunização propostas por Hauser *et al.* (2001) diferem ligeiramente da habitual estratégia de dedicação internacional, segundo a qual a duração dos activos deve ser igual à duração dos passivos, para cada uma das moedas representadas na carteira.

(94) Pela sua especificidade, optámos por analisar neste ponto apenas aquelas limitações que ao modelo de duração de Macaulay dizem respeito. Tivemos contudo em mente que este modelo pode, também ele, ser considerado um modelo de duração imunizante, e que por isso padece obviamente de algumas das limitações que a estes modelos serão apontadas no ponto 4.2.5.

A segunda limitação fundamental, que decorre da primeira, refere-se ao facto do processo estocástico adoptado apenas admitir choques do tipo paralelo.⁹⁵ Esta hipótese despreza a possibilidade dos choques assumirem magnitude distinta para os diferentes prazos de vencimento e reduz, na medida em que os movimentos se afastam do comportamento esperado, a eficácia da estratégia de imunização.⁹⁶

A última limitação fundamental do modelo está relacionada com o facto da duração a ele associada apenas constituir uma medida adequada da sensibilidade-preço de uma obrigação nos casos em que as variações nas taxas de juro são infinitesimais.⁹⁷ Na presença de choques significativos, o fenómeno da convexidade ganha relevância.

4.2. Modelos de Duração Imunizante

4.2.1. Modelo de Duração Aditiva de Fisher e Weil

Reconhecendo as limitações que a utilização do conceito de duração de Macaulay coloca à estratégia de imunização, Fisher e Weil (1971) são os primeiros autores a debruçar-se sobre as hipóteses comportamentais subjacentes aos modelos de duração.

(⁹⁵) As circunstâncias em que a duração de Macaulay pode ser utilizada como medida do risco de taxa de juro foram analisadas em detalhe por Ingersoll, Skelton e Weil (1978, pp. 631), e enunciadas pelo seguinte teorema: «[...] *Theorem 1: Yields to maturity on all assets with known fixed payments can change by the same amount if and only if the yield curve is flat (Yields to maturity on pure discount bonds of all maturities are the same) and makes a parallel shift.*»

(⁹⁶) (Em resposta, processos estocásticos alternativos para a EPTJ foram sugeridos por Bierwag (1977) e Khang (1979), admitindo choques aleatórios que afectam de forma diferenciada as taxas para as diferentes maturidades. Das condições de imunização resultaram expressões alternativas para as medidas do risco de taxa de juro (durações). Bierwag, Kaufman e Toevs (1983a, pp. 110) propõem o termo *duração imunizante* para designar as medidas de duração assim derivadas, uma vez que estas apenas imunizam de forma adequada na eventualidade dos choques sobre a EPTJ corresponderem aos choques pré-determinados.)

(⁹⁷) (Para a maioria dos derivados de taxa de juro (opções, swaptions, etc.), activos onde a relação preço-taxa de juro é muitas vezes descontínua, nem a verificação desta hipótese seria suficiente para tornar a duração de Macaulay uma medida adequada do risco de taxa de juro.)

Ao contrário dos seus antecessores, Fisher e Weil abandonam a assunção de que a EPTJ é horizontal. Em contrapartida admitem, de forma explícita, que a EPTJ é governada pela teoria das expectativas puras, o que lhes permite obter uma estimativa, *ex-ante*, do retorno esperado para o HTI.⁹⁸ Consideram ainda que a incerteza no modelo é fruto de variações não antecipadas⁹⁹ nas taxas de juro, mais propriamente de choques do tipo aditivo (choques paralelos) sobre a EPTJ.¹⁰⁰

Sob a hipótese de que as responsabilidades futuras se cingem a um único pagamento a realizar em data conhecida à partida, Fisher e Weil redefinem a estratégia de imunização desenvolvendo as condições segundo as quais uma carteira de obrigações obtém, no mínimo, uma taxa de retorno igual à esperada ou, de forma equivalente, o valor final da carteira é pelo menos tão grande quanto seria de prever se não ocorressem, durante o HTI, quaisquer choques sobre as taxas de juro.

A condição de imunização envolve, uma vez mais, o ajustamento de uma medida das características da carteira (duração) ao HTI. Contudo, como são admitidos pressupostos distintos relativamente ao comportamento das taxas de juro, a medida de risco derivada difere (ligeiramente) da duração de Macaulay. Δ

(⁹⁸) Recordamos que, de acordo com a teoria das expectativas puras, a taxa de retorno esperada para um determinado período deve ser igual à rendibilidade associada ao investimento de uma unidade monetária numa obrigação de cupão zero com maturidade no HTI.

(⁹⁹) Esta ressalva é importante uma vez que, como referem Bierwag *et al.* (1983a, pp. 109), a consideração de uma EPTJ não horizontal permite, no contexto da teoria das expectativas puras, decompor a variação registada nas taxas de juro em variação *esperada* e variação *não antecipada*. Refira-se ainda que a hipótese assumida por Fisher e Weil é extensível a todos os modelos de duração imunizante.

(¹⁰⁰) Uma das consequências imediatas desta hipótese é a de que os choques de taxa de juro afectam em igual magnitude as taxas às quais serão reinvestidos os cupões libertados pela obrigação (taxas com prazos anteriores ao HTI), e as taxas que determinam o valor de liquidação da carteira (aquelas cujas maturidades se situam para além do HTI). Shiu (1987;1990) generaliza os resultados de Fisher e Weil aos casos em que os choques de taxa de juro são representados por uma função arbitrária do tempo.

Na demonstração formal da condição de imunização Fisher e Weil consideram, para além das hipóteses já referidas, os seguintes pressupostos:

- i) O investimento é efectuado em obrigações clássicas sem risco de incumprimento, e sem cláusulas de reembolso antecipado;
- ii) Não existem custos de transacção;
- iii) Ao investidor é facultada a possibilidade de ajustar, sempre que o considere necessário, a composição da sua carteira;¹⁰¹
- iv) É utilizado o regime de capitalização contínua¹⁰² (com cash flows discretos) para determinar o valor de mercado das obrigações.

A derivação das condições de imunização é efectuada, tal como no modelo de Macaulay, examinando as condições (de 1ª e 2ª ordem) sob as quais a carteira tem, no final do HTI, H , um valor mínimo. Tomando em consideração a EP'IJ, $\vec{i} = i(0, t)$ ¹⁰³, os valores inicial ($t = 0$) e terminal ($t = H$) da carteira são agora representados por:

$$B(\vec{i}) = \int_0^T c(t) \cdot e^{-i(0,t)t} dt \quad (4.29)$$

e por::

$$B_H(\vec{i}) = B(\vec{i}) e^{[i(0,H)]H} \quad (4.30)$$

respectivamente. Suponhamos agora que imediatamente após a realização do investimento ocorre um choque aleatório aditivo α sobre a EP'IJ¹⁰⁴, com a nova curva de taxas ($\vec{i} + \alpha$) a tomar a seguinte representação:

(¹⁰¹) Esta hipótese visa garantir que as condições de imunização se verificam ao longo de todo o HTI.

(¹⁰²) Para uma abordagem em regime de capitalização discreta veja-se, por exemplo, Bierwag, Kaufman e Toevs (1983a), Bierwag (1987) e Fonseca (1999).

(¹⁰³) A notação utilizada para representar a EP'IJ, $\vec{i} = i(0, t)$, considera que o primeiro índice (0) designa o momento actual, enquanto que o segundo índice representa a maturidade da obrigação.

(¹⁰⁴) Um choque aleatório aditivo de dimensão α sobre a EP'IJ equivale a um deslocamento vertical, de magnitude idêntica, da estrutura de taxas *forward* implícita. A demonstração desta afirmação pode ser encontrada em Grandville (*op. cit.*, pp. 210).

$$(\vec{i} + \alpha) = i(0, t) + \alpha, \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

Normalmente assume-se que após a ocorrência do choque inicial as taxas de juro *forward* implícitas na nova EPTJ se tornam taxas *spot* futuras, até ao final do HTI. Usando um procedimento análogo ao referido anteriormente para o modelo de Macaulay, das condições de 1ª ordem¹⁰⁵ para a obtenção de um mínimo vem:

$$H = - \frac{1}{B(\vec{i})} \frac{dB(\vec{i})}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (4.32)$$

Por palavras, o valor final do investimento encontra-se imunizado contra *choques aditivos* sobre a EPTJ (o valor final é no mínimo igual àquele que seria obtido caso não existisse qualquer choque, i.e., $\alpha = 0$) se a duração da carteira (ou simplesmente da obrigação), calculada com respeito à EPTJ inicial, for igual ao HTI.¹⁰⁶ Esta duração, conhecida na literatura por *Duração Aditiva de Fisher e Weil* (D_{FW}), é definida por:

$$D_{FW}(\vec{i}) = \frac{1}{B(\vec{i})} \int_0^T t \cdot c(t) \cdot e^{-[i(0,t)+\alpha]t} dt \quad (4.33)$$

(¹⁰⁵) Demonstra-se que a função $B_H(\vec{i})$ é convexa com respeito a α , ou seja, que as condições de 2ª ordem atestam a existência de um mínimo. Prova-se ainda que:

$$\frac{d^2 \ln B_H}{d\alpha^2} = \int_0^T \phi(t) (t-D)^2 dt \quad \text{com} \quad \phi(t) = \frac{c(t) e^{-[i(0,t)+\alpha]t}}{B(\vec{i} + \alpha)} \quad \text{e} \quad \int_0^T \phi(t) dt = 1$$

recuperando, agora num contexto em que a EPTJ é não horizontal, a já familiar medida de dispersão S .

(¹⁰⁶) Prova-se igualmente (em termos analíticos) que, verificada a condição de imunização, a taxa de retorno efectivo da carteira, r_H , será igual à taxa de juro proporcionada pela aquisição, em $t = 0$, de uma obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTI, ou seja, $i(0, H)$. Se representarmos o valor de r_H segundo:

$$r_H = \frac{1}{H} \log \left[\frac{B(\vec{i} + \alpha)}{B(\vec{i})} \right] + i(0, H) + \alpha$$

Podemos verificar que nos casos em que não existe qualquer choque sobre a EPTJ, i.e., $\alpha = 0$, $B(\vec{i} + \alpha) = B(\vec{i})$, e a taxa de retorno realizado é dada simplesmente por: $r_H = i(0, H)$.

Destaque final para o facto da duração de Macaulay poder ser considerada um caso particular da duração de Fisher e Weil, bastando para tal que as taxas *spot* para os vários prazos sejam idênticas, i.e., $[i(0,1) = i(0,t) = i]$, e os choques sejam do tipo paralelo.¹⁰⁷

4.2.2. Modelo de Duração Multiplicativa de Bierwag

Consciente das fraquezas do modelo de Fisher e Weil, e atento à realidade empírica que sugere que as taxas de juro de curto prazo flutuam mais do que as taxas de longo prazo, Bierwag (1977) desenvolve as condições necessárias à imunização de uma carteira de obrigações contra choques do tipo multiplicativo sobre a EPTJ. O autor admite que o choque (λ) sofrido por cada taxa de juro é proporcional ao seu respectivo valor. Em termos formais, o processo estocástico correspondente é definido por:

$$(\tilde{i}, \lambda) = \lambda \cdot i(0, t) \quad , \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.34)$$

onde (\tilde{i}, λ) representa o valor assumido pela taxa *spot* após o choque, e λ é uma variável aleatória positiva. Se $\lambda = 1$ a EPTJ não se desloca. Para valores de λ superiores (inferiores) à unidade a EPTJ desloca-se para cima (baixo).¹⁰⁸

(¹⁰⁷) Efectuando as necessárias adaptações na equação (4.5), a duração de Fisher e Weil pode ser usada para estimar a volatilidade dos retornos de uma obrigação mediante a seguinte expressão:

$$\frac{\Delta B(\tilde{i})}{B(\tilde{i})} \cong -D_{FW} \times \Delta \alpha$$

O cálculo da duração de uma carteira obedece, no modelo de Fisher e Weil, a procedimentos similares aos mencionados no ponto 4.1.4. a propósito do modelo de Macaulay.

(¹⁰⁸) O processo estocástico sugerido por Bierwag apresenta características peculiares uma vez que pressupõe, implicitamente, que a configuração inicial da EPTJ tem influência na variação relativa das taxas juro de curto e longo prazo. Com efeito, nos casos em que a EPTJ tem uma inclinação inicial positiva (negativa), a ocorrência de um choque aleatório positivo ($\lambda > 1$) traduz-se numa variação instantânea bastante mais pronunciada para as taxas de juro correspondentes às maturidades mais longas (curtas). Raciocínios semelhantes podem ser formulados nos casos em que os choques são do tipo negativo ($\lambda < 1$).

Encetando procedimentos análogos aos indicados para os modelos anteriores, das condições de 1ª ordem resulta, neste caso, a seguinte condição de imunização:

$$-\frac{1}{B(\vec{i})} \frac{dB(\vec{i})}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = i(0, H)H \quad (4.35)$$

A medida de duração relevante neste modelo – *Duração Multiplicativa* de Bierwag¹⁰⁹, D_{BW} – é definida, de forma implícita, pela seguinte equação:

$$i(0, D_{BW}) D_{BW} = \frac{1}{B(\vec{i})_0} \int_0^T t \cdot c(t) \cdot i(0, t) \cdot e^{-i(0, t)t} dt \quad (4.36)$$

A D_{BW} tem, à semelhança das medidas anteriores, uma dimensão temporal. No entanto, para a maioria das aplicações não existe qualquer vantagem prática na determinação do seu valor, sendo suficiente o cálculo de $i(0, D_{BW}) D_{BW}$.¹¹⁰ A adequada imunização contra *choques multiplicativos* sobre a EPTJ é conseguida, de novo, ajustando a duração carteira (D_{BW}) ao HTL.¹¹¹

Para além de propor uma nova duração imunizante, Bierwag reconhece pela primeira vez que os choques de taxa de juro podem ser conduzidos, simultaneamente, por mais do que uma “força”. Neste contexto, o autor analisa as condições de imunização na presença de um processo estocástico que combina choques aditivos e multiplicativos. >

(¹⁰⁹) Ou, simplesmente, Duração de Bierwag.

(¹¹⁰) A determinação de D_{BW} implicaria o recurso a um procedimento iterativo.

(¹¹¹) A utilização da duração de Bierwag como medida do risco de taxa de juro associado a choques multiplicativos sobre a EPTJ é feita de acordo com a seguinte equação:

$$\frac{\Delta B(\vec{i})}{B(\vec{i})} \cong -D_{BW} \cdot i(0, D_{BW}) \times \Delta \lambda, \text{ com } \Delta \lambda = \lambda - 1$$

O cálculo da duração de uma carteira no modelo de Bierwag não difere substancialmente do exposto para os modelos anteriores. Para mais detalhes ver Bierwag *et al.* (1983a) e Bierwag (1987).

4.2.3. Modelos de Duração Log-Aditiva e Log-Multiplicativa de Khang

Nenhum dos processos estocásticos até agora analisados é compatível com a evidência empírica, alvitada por Malkiel (1966), entre outros, segundo a qual as taxas de juro de curto prazo flutuam mais do que as taxas de longo prazo, quer a EPTJ patenteie uma inclinação negativa, quer esta apresente uma inclinação positiva.¹¹² Em face desta observação, Khang (1979) sugere dois novos processos estocásticos: um processo log-aditivo e um processo log-multiplicativo. O *processo log-aditivo* impõe uma relação inversa entre a volatilidade das taxas de juro e o seu respectivo prazo. É representado por:

$$(\bar{i}, \lambda, \alpha) = i(0, t) + \frac{\lambda \ln(1 + \alpha t)}{\alpha t}, \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.37)$$

onde λ denota agora a dimensão absoluta do choque, α é um parâmetro positivo que regula a volatilidade relativa das taxas de curto prazo com respeito às taxas de longo prazo, e as demais variáveis têm o significado habitual.¹¹³ Das condições de 1ª ordem resulta a seguinte condição de imunização:

$$-\frac{1}{B(\bar{i})} \frac{dB(\bar{i})}{d\lambda} \bigg|_{\lambda=0} = \frac{\ln(1 + \alpha H)}{\alpha} \quad (4.38)$$

(¹¹²) Relembremos, a propósito, que o processo estocástico sugerido por Bierwag (1977) apenas ratifica esta regularidade empírica nos casos em que a EPTJ tem inclinação negativa. Era precisamente esta restrição que Khang (1979) procurava ultrapassar uma vez que nos estudos de Malkiel (1966) se havia concluído que, em média, a EPTJ tinha uma inclinação positiva: «*examination of interest rate movements in the post-World War II period in the United States, (...) show (i) that short-term rates have fluctuated more than long-term rates and (ii) that the yield curve on the average has been upward-sloping*», Khang (*op. cit.*, pp. 1085-86).

(¹¹³) Note-se que o rácio $\ln(1 + \alpha)/\alpha$ diminui à medida que a maturidade, representada por t , aumenta. Refira-se ainda que quanto maior for o valor de α tanto maior será a volatilidade relativa das taxas de curto prazo com respeito às taxas de longo prazo. Khang (*op. cit.*, pp. 1087) fornece um exemplo para ilustrar o papel deste parâmetro no processo estocástico: um valor de 0,25 para α significa que a taxa de juro instantânea oscilará o dobro da taxa correspondente ao prazo de 10 anos. Sublinhe-se por último que, à medida que α tende para zero o termo $\ln(1 + \alpha)/\alpha$ tende para a unidade e o processo log-aditivo converge para um processo aditivo.

A imunização contra *choques log-aditivos* exige novamente a igualdade entre a duração da carteira e o HTI, com a diferença de que a medida de risco de taxa de juro relevante – *Duração Log-Aditiva* de Khang, DK_{LA} – é, neste caso, definida implicitamente por:¹¹⁴

$$\ln(1+\alpha DK_{LA}) = \frac{1}{B(\bar{i})} \int_0^T c(t) \cdot \ln(1+\alpha t) \cdot e^{-i(0,t)t} dt \quad (4.39)$$

O segundo processo estocástico proposto por Khang – *processo log-multiplicativo* – distingue-se do primeiro pelo facto de ponderar os choques sobre cada taxa pelo respectivo nível. Em termos formais:

$$(\bar{i}, \lambda, \alpha) = i(0, t) \left[1 + \frac{\lambda \ln(1 + \alpha t)}{\alpha t} \right], \quad t = 1, 2, \dots \quad (4.40)$$

A este processo estocástico corresponde agora a seguinte condição de imunização:

$$-\frac{1}{B(\bar{i})} \frac{dB(\bar{i})}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = i(0, H) \cdot \frac{\ln(1 + \alpha H)}{\alpha} \quad (4.41)$$

A medida de duração adequada a este modelo, conhecida por *Duração Log-Multiplicativa* de Khang, DK_{LM} , é definida implicitamente por:¹¹⁵

$$i(0, DK_{LM}) \cdot \ln(1 + \alpha DK_{LM}) = \frac{1}{B(\bar{i})} \int_0^T c(t) \cdot [i(0, t) \ln(1 + \alpha t)] \cdot e^{-i(0,t)t} dt \quad (4.42)$$

(¹¹⁴) Tal como para o modelo de Bierwag, na maioria das aplicações práticas é suficiente o cálculo do valor de $\ln(1 + \alpha DK_{LA})$. A utilização da duração log-aditiva para aproximar as variações no preço de uma obrigação passa a ser feita mediante a seguinte expressão:

$$\frac{\Delta B(\bar{i})}{B(\bar{i})} \cong -\ln(1 + \alpha DK_{LA}) \times \Delta \lambda$$

O cálculo da duração de uma carteira no modelo log-aditivo de Khang não difere substancialmente do exposto para os modelos anteriores. Para mais detalhes ver Bierwag *et al.* (1983a) e Bierwag (1987).

(¹¹⁵) O seu uso para aproximar variações no preço de uma obrigação é efectuado mediante:

$$\frac{\Delta B(\bar{i})}{B(\bar{i})} \cong -i(0, DK_{LM}) \cdot \ln(1 + \alpha DK_{LM}) \times \Delta \lambda$$

4.2.4. Limitações dos Modelos de Duração Imunizante

A juntar às carências detectadas aquando da apresentação do modelo de Macaulay, os modelos de duração imunizante foram alvo de críticas importantes. A principal limitação destes modelos está relacionada com o facto da sua eficácia, em termos de imunização, depender da maior ou menor conformidade dos choques de taxa de juro com o processo estocástico definido à partida. Neste sentido, a incapacidade de identificar correctamente o padrão seguido nas oscilações de taxa de juro sujeita o investidor ao denominado *risco de processo estocástico*.

Uma segunda crítica, dirigida sobretudo à utilização das medidas de duração na elaboração de estratégias de imunização, tem origem na circunstância de em muitos casos se assumir que os investidores são totalmente avessos ao risco, representando a carteira imunizada apenas um ponto no espaço risco/retorno.¹¹⁶

Uma terceira limitação, que explica em parte o fraco desempenho empírico dos modelos mais sofisticados, está relacionada com o tipo de incerteza descrito pelos modelos de factor único. De facto, nestes modelos considera-se que as correlações entre todas as taxas *spot* ao longo da EPIJ são perfeitas¹¹⁷, o que significa que, mesmo nos casos em que o processo estocástico é correctamente identificado, a não verificação desta hipótese coloca de novo o problema da má especificação do modelo.

(¹¹⁶) Para mais detalhes veja-se Babcock (1984), Kaufman (1978), Bierwag, Kaufman e Toevs (1982) e Bierwag, Kaufman, Schweitzer e Toevs (1981).

(¹¹⁷) Em termos mais rigorosos, a hipótese requer uma correlação perfeita entre as *variações* nas taxas *spot*.

A outro nível, Ingersoll, Skelton e Weil (1978), e Cox, Ingersoll e Ross (1979) demonstram que os processos estocásticos considerados pelos modelos de duração imunizante são inconsistentes com as condições de equilíbrio geral nos mercados obrigacionistas. Esta conclusão é explicada pela natureza convexa, com respeito à magnitude dos choques de taxa de juro, das funções de retorno das obrigações. Ingersoll *et al.* assinalam ainda que, para alguns destes modelos¹¹⁸, oportunidades de arbitragem podem ser criadas detendo obrigações com taxa de cupão diferente.¹¹⁹

Com o intuito de eliminar esta possibilidade, modelos de equilíbrio para a EPTJ foram desenvolvidos por Vasicek (1977), Ingersoll *et al.* (1978) e Cox *et al.* (1979), entre outros, dos quais resultaram novas medidas do risco de taxa de juro (durações estocásticas).¹²⁰ Como teremos oportunidade de aprofundar no capítulo 6, Christensen e Sørensen (1994), Chance e Jordan (1996), e Nawalkha (1999) contestam os argumentos de Ingersoll *et al.* e demonstram que a razão pela qual a convexidade cria oportunidades de arbitragem se deve à não inclusão do valor temporal na análise.

(¹¹⁸) Ingersoll *et al.* (1978) referem-se, em concreto, aos modelos de Fisher e Weil, Bierwag, e Khang.

(¹¹⁹) Para comprovar este argumento admitamos, a título de exemplo, que duas carteiras obrigacionistas de igual montante são adquiridas por um investidor, sendo que uma delas é composta por um conjunto de obrigações com duração igual ao HTI (H), e a segunda é constituída por uma única obrigação de cupão zero com vencimento no HTI. Sejam $B_P(H)$ e $B_Z(H)$ os valores, no final do HTI, da carteira imunizante e da obrigação de cupão zero, respectivamente. Prova-se que para um determinado choque aditivo sobre a EPTJ se verifica a seguinte desigualdade: $B_P(H) \geq B_Z(H)$. Este resultado é claramente inconsistente com a eficiência nos mercados uma vez que ganhos de arbitragem (no valor de $B_P(H) - B_Z(H)$) podem ser conseguidos vendendo a descoberto a obrigação de cupão zero (ou emitindo-a), e adquirindo a carteira imunizada.

(¹²⁰) As diferenças entre os modelos de duração imunizante, que assumem implicitamente que a convexidade tem um preço, e os modelos de equilíbrio para a EPTJ é posta em evidência por Brennan e Schwartz (1983, pp.10) no seguinte excerto: «[...] *Duration starts from an a priori definition of the state variable which defines the yield curve and makes (usually implicit) assumptions about its evolution over time. The state variable is chosen so that duration may be calculated directly and has the weighted average maturity property of a duration measure. No check is made as to whether the stochastic behavior of the term structure implied by the state variable is consistent with equilibrium. The equilibrium approaches also start from an exogenously specified state variable and its behavior; however, the state variable is taken to define a single point on the yield curve rather than the entire yield curve. Equilibrium conditions are then adduced to yield a family of bond valuation functions whose parameters depend upon investors tastes.*».

Em resposta às críticas dirigidas às propriedades de não equilíbrio exibidas pelos modelos de duração imunizante, Bierwag *et al.* (1982) desenvolvem um modelo consistente com as condições de equilíbrio geral.¹²¹ O modelo é unifactorial, i.e., impõe de novo a correlação perfeita entre as taxas *spot*, mas comporta dois estados da natureza. Ambos os estados são, todavia, função de uma única fonte de incerteza.

A existência de oportunidades de arbitragem foi rebatida por Bierwag *et al.* (1983a) com base no argumento de que a operação de arbitragem atrás descrita seria impossível nos casos em que os mercados são incompletos¹²², ou numa situação em que todas as obrigações com a mesma maturidade têm igual cupão. Prisman e Shores (1988) retomam este tema e demonstram que, nos casos em que a EPTJ é expressa em termos de um polinómio de grau não inferior a dois, a imunização perfeita só é possível se a carteira for constituída por uma única obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTI, e que, nesse caso, as oportunidades de arbitragem são eliminadas.

Barber e Copper (1997) vão ainda mais longe e provam que a existência ou não de oportunidades de arbitragem depende (mesmo quando os choques sobre a EPTJ são do tipo paralelo) das hipóteses assumidas relativamente à teoria explicativa da EPTJ.¹²³ Acrescentam ainda que o valor temporal desempenha um papel importante no resultado da estratégia.

(¹²¹) O modelo é designado por *General Additive Stochastic Process* (GASP).

(¹²²) A incompletude dos mercados caracteriza-se, neste caso, pelo facto de não existirem (ou não poderem ser emitidas) obrigações de cupão zero para todas as maturidades.

(¹²³) Os autores admitem, em concreto, que nos casos em que a hipótese das expectativas puras é adoptada a estratégia de imunização admite oportunidades de arbitragem. Nos casos em que as taxas *spot* futuras se afastam das taxas *forward* actuais, preservando contudo a hipótese de que o prémio de risco é idêntico para todas as maturidades, as oportunidades de arbitragem são eliminadas. Registe-se que esta restrição corresponde à usual condição de não arbitragem presente na maioria dos modelos dinâmicos para a taxa de juro. Para mais detalhes sobre este tema veja-se o capítulo 8.

5. Modelos de Factor Único Independentes do Processo Estocástico

Os modelos de duração imunizante são de aplicação limitada, dado que se baseiam em processos estocásticos inconsistentes com as condições de equilíbrio e apenas permitem uma protecção efectiva face a choques de taxa de juro com um padrão particular. Os *modelos de risco de taxa de juro independentes do processo estocástico* são, pelo contrário, compatíveis com qualquer comportamento das taxas de juro sendo, por isso, consistentes com as condições de equilíbrio nos mercados. A sua principal vantagem centra-se, todavia, nos ganhos de imunização que a sua utilização possibilita.

5.1. Modelo de Duração de Babbel

Segundo Babbel (1983), a metodologia usada para derivar as medidas de duração imunizante condiciona, implicitamente, a volatilidade relativa das taxas de juro para as diferentes maturidades. Contrariando este princípio, o autor opta por uma abordagem diferente e não específica à partida a natureza dos choques a que a EPTJ está sujeita. Ao invés, incorpora o comportamento histórico da volatilidade numa nova definição de duração. O primeiro passo na implementação do modelo de Babbel consiste na estimação da *estrutura por prazos de volatilidade* das taxas de juro. Pretende-se, deste modo, determinar a flutuação relativa das taxas *spot* para cada prazo $[i(0,t), t > 1]$ com respeito à taxa de curto prazo $i(0,1)$. O autor efectua regressões sobre os dados históricos (usando o método dos mínimos quadrados ordinário) com base nas seguintes equações:

$$\Delta i(0,t) = \hat{\beta}_t \Delta i(0,1) + \varepsilon_t \quad (5.1)$$

onde

$$\Delta i(0,t) = \frac{\Delta(1 + i_{0,t})}{1 + i_{0,t}} \quad \text{e} \quad \Delta i(0,1) = \frac{\Delta(1 + i_{0,1})}{1 + i_{0,1}}$$

e onde β_t é um indicador de volatilidade relativa. Nestas condições, qualquer choque de dimensão λ ¹²⁴ sobre a taxa de juro de curto prazo exerce um efeito de magnitude igual a $\beta_t \lambda$ sobre a taxa correspondente à maturidade t . Significa isto que a relação entre as taxas de juro antes e após o choque é agora definida por:

$$(1+i_{0,t}^*) = (1+i_{0,t})(1+\lambda) \quad (5.2)$$

e por:

$$(1+i_{0,t}^*) = (1+i_{0,t})(1+\beta_t \lambda) \quad (5.3)$$

A determinação das condições de imunização no modelo de Babbel obedece a procedimentos semelhantes aos indicados para os modelos de duração imunizante. Das condições de 1ª ordem para a obtenção de um mínimo resulta, neste caso:

$$-\frac{1}{B(\vec{i})} \frac{dB(\vec{i})}{d\lambda} \bigg|_{\lambda=0} = H\beta_H \quad (5.4)$$

A medida de duração relevante – *Duração de Babbel* (D_B) – é definida implicitamente por:

$$D_B \beta_{Db} = \frac{1}{B(\vec{i})} \sum_{t=1}^T t \cdot c_t \cdot \beta_t (1+i_{0,t})^{-t} \quad (5.5)$$

O autor testou empiricamente o desempenho desta nova medida de duração, comparando-o com o proporcionado pelo tradicional modelo de Fisher e Weil e por duas estratégias alternativas: uma estratégia de maturidade e uma estratégia de curto prazo.¹²⁵ Entre as conclusões obtidas destacamos, por um lado, o facto do modelo de Fisher e Weil apresentar resultados pelo menos tão bons quanto os obtidos pelo

(¹²⁴) O choque de taxa de juro é definido em termos percentuais.

(¹²⁵) A *estratégia de maturidade* consistia na compra de uma obrigação com maturidade igual ao HTI (5 anos), reinvestindo os cupões entretanto recebidos nessa mesma obrigação. A *estratégia de curto prazo* compreendia a aquisição sucessiva de obrigações (mais propriamente de Bilhetes do Tesouro americano) com prazo de 6 meses.

modelo de Babbel e, por outro, o facto das estratégias de imunização se superiorizarem às estratégias alternativas, em especial à estratégia de maturidade.

5.2. Modelo do M-Quadrado

Fong e Vasicek (1983;1984) desenvolvem um modelo alternativo que permite a redução do risco de imunização associado a choques não paralelos sobre a EPTJ. Os autores mostram que, igualando a duração de uma carteira de obrigações ao HTI e minimizando o valor do seu *M-Quadrado* (M^2), uma medida da dispersão dos momentos de pagamento dos cash flows em torno do HTI, o risco de imunização é atenuado.¹²⁶ Ao contrário dos modelos de duração imunizante, o modelo do M^2 é compatível com as condições de equilíbrio nos mercados uma vez que não requer hipóteses específicas sobre o tipo de choques sofrido pela EPTJ.

O modelo do M^2 pode ser derivado segundo duas abordagens distintas. A abordagem pelo limite inferior (*Lower Bound Approach*), apresentada em Fong e Vasicek (1984), é baseada na obtenção de um limite inferior (negativo) para a variação no valor terminal de uma carteira de obrigações. A segunda abordagem, referenciada em Fong e Vasicek (1983) e Fong e Fabozzi (1985), assenta numa expansão em série de Taylor para as variações no valor final do investimento (em resultado de modificações nas taxas de juro *forward*) com respeito ao tempo até à maturidade dos cash flows da carteira. Pese embora ambas as metodologias permitam a obtenção da mesma medida de risco de

⁽¹²⁶⁾ Por outras palavras, de entre as carteiras imunizantes no sentido clássico ($D = H$) o investidor deve escolher aquela cuja perda máxima é mínima para o conjunto dos choques admissíveis sobre as taxas de juro *forward*.

taxa de juro - o M-Quadrado -, existem algumas diferenças (essencialmente técnicas) entre as duas abordagens que vale a pena explorar.

5.2.1. Abordagem pelo Limite Inferior (Lower Bound Approach)

Designemos por B_0 o valor actual de uma carteira de obrigações, isentas de risco de crédito, que libertam cash flows c_t no momento t ($t = 1, \dots, T$):

$$B_0 = \sum_{t=1}^T c_t \cdot W_t \quad \text{com} \quad W_t = \exp \left[- \int_0^t i(\tau) d\tau \right] \quad (5.6)$$

onde W_t denota a função de desconto actual para a maturidade t , utilizando as taxas de juro *forward* instantâneas, $[i(t), t > 0]$. Representemos agora por B_H o valor da carteira no final do HTI, H , caso não ocorram quaisquer alterações nas taxas *forward*:

$$B_H = B_0 \cdot \exp \left[\int_0^H i(\tau) d\tau \right] \quad (5.7)$$

Suponhamos agora que as taxas *forward* se modificam instantaneamente, passando de $i(t)$ para $i'(t) = i(t) + \Delta i(t)$, onde $\Delta i(t)$ simboliza uma qualquer função arbitrária do prazo t .¹²⁷ Admitindo que os choques sobre a inclinação da EPTJ são limitados, superiormente, por uma constante K , isto é, $d\Delta i(t)/dt \leq K$ para $t \geq 0$, e que a duração da carteira (calculada segundo a fórmula de Fisher-Weil) é igual ao HTI, Fong e Vasicek derivam o seguinte limite inferior para as variações percentuais em B_H :

(¹²⁷) O modelo do M-Quadrado impõe muito poucas restrições ao processo estocástico seguido pelas taxas de juro. A única assunção necessária prende-se com a exigência de que a variação nas taxas *forward*, $\Delta i(t)$, seja representada por uma função continuamente diferenciável com respeito ao tempo até à maturidade. Montrucchio e Peccati (1991) estendem os resultados obtidos por Fong e Vasicek (1983) e Redington (1952) aos casos em que os choques são não diferenciáveis. Uberti (1997) alarga as conclusões a um contexto em que os choques sobre a EPTJ são do tipo convexo.

$$\frac{\Delta B_H}{B_H} \geq -\frac{1}{2} K \cdot M^2 \quad (5.8)$$

onde:¹²⁸

$$M^2 = \frac{1}{B_0} \sum_{t=1}^T c_t \cdot W_t (t-H)^2 \quad (5.9)$$

A desigualdade (5.8) é válida, quer para choques paralelos sobre a EPTJ, quer para choques não paralelos.¹²⁹ Ao afirmarem que o valor do M^2 é sempre positivo¹³⁰, Fong e Vasicek assumem, implicitamente, que o investidor não pode deter posições negativas na carteira. Nestas circunstâncias, a ocorrência de um choque positivo sobre a inclinação é suficiente para que o sinal de $-K \cdot M^2$ na equação (5.8) seja negativo, ou seja, para que o investidor sofra perdas na sua carteira.

Ora a novidade deste modelo reside justamente na sugestão apresentada para atenuar essas perdas. Segundo os autores a solução passa, independentemente do processo estocástico que governa as taxas de juro, por escolher de entre todas as carteiras que satisfazem a tradicional restrição de duração aquela que minimiza o valor do M^2 .¹³¹ Só assim é possível minimizar as consequências de choques positivos sobre a inclinação da EPTJ. Nawalkha, Lacey e Schneeweis (1990) propõem a sua determinação utilizando a metodologia da *programação linear*, resolvendo, designadamente, o seguinte problema:

(¹²⁸) Em alternativa à formula indicada em (5.9) soluções fechadas para o cálculo do M-Quadrado podem ser encontradas em Nawalkha, Lacey e Schneeweis (1990).

(¹²⁹) Para choques paralelos a variável K toma o valor zero uma vez que, por definição, a alteração na inclinação da EPTJ é nula. Nestes casos, a imunização pressupõe a já familiar condição $D_{FW} = H$, ou seja, o modelo é consistente com a teoria tradicional sobre a imunização. Para choques do tipo não paralelo a variável K assume valores positivos ou negativos, consoante sejam positivos ou negativos, respectivamente, os choques sobre a inclinação da EPTJ.

(¹³⁰) Fong e Vasicek (1984, pp. 1544).

(¹³¹) Ao imporem a restrição de duração Fong e Vasicek presumem, implicitamente, que os choques de taxa de juro do tipo paralelo são mais prováveis. Esta hipótese é confirmada, por exemplo, pelos estudos empíricos conduzidos por Ilmanen (1992).

$$\text{Min} \sum_{k=1}^J w_k M_k^2 \quad (5.10)$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{k=1}^J w_k D_k = H \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^J w_k = 1$$

onde M_k^2 simboliza o valor do M^2 calculado para a $k^{\text{ésima}}$ obrigação, D_k representa a duração aditiva de Fisher-Weil, e as demais variáveis têm o significado habitual.¹³²

Fong e Vasicek (1984) assinalam ainda as afinidades existentes entre o conceito de duração e a definição do M^2 expressa em (5.9). Efectivamente, enquanto que a duração pode ser interpretada como uma *média* ponderada do tempo que falta para os pagamentos da carteira, o M^2 não é mais do que uma *variância* desses mesmos tempos de pagamento, em torno do HTI.¹³³ Acresce que a medida de dispersão derivada em (4.8) constitui um caso particular do M^2 : o caso em que $D = H$. Entende-se assim, de forma clara, a razão pela qual carteiras com pagamentos bastante dispersos em torno do

(¹³²) A caracterização do M^2 como uma medida do risco de taxa de juro pode ser entendida de duas formas. A primeira, retratada claramente no limite inferior obtido em (5.8), diz respeito ao *efeito de alavanca* que é exercido pelo M^2 sobre as variações no valor terminal da carteira em resultado de choques adversos (não paralelos) sobre a EPIJ. Para um mesmo choque de taxas de juro, contido em K , a variação em B_H será tanto maior quanto maior for o valor do M^2 . Dito de outro modo, a exposição ao risco de taxa de juro por parte da carteira será tanto maior quanto maior for o valor do M^2 . A segunda perspectiva está associada ao intervalo admissível para o valor do M^2 . Tal como afirmam Fong e Vasicek (1984, pp. 1544), o valor desta medida é sempre positivo, atingindo o valor mais baixo ($M^2 = 0$) apenas nos casos em que a carteira é constituída por uma única obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTI. Acontece que nesta situação a carteira está perfeitamente imunizada uma vez que não subsistem quaisquer choques de taxa de juro susceptíveis de afectar o valor terminal do investimento. Qualquer outra carteira será sempre vulnerável a movimentos adversos de taxa de juro. Em suma, podemos de alguma forma concluir que a medida de risco M^2 é um indicador do quanto uma determinada carteira obrigacionista se afasta da carteira imunizante ideal.

(¹³³) Esta conclusão torna-se mais transparente se notarmos, como faz Shiu (1987), que no caso em que $D = H$ a equação (5.9) pode ser simplificada para dar lugar a $M^2 = C - H^2$, onde C denota o conceito de convexidade que analisaremos no capítulo 6. Obtém-se, assim, uma fórmula análoga à definição de variância de uma variável aleatória $\text{Var}(X) = (E(X^2) - E(X))^2$.

HTI evidenciam um valor elevado para o M^2 e, consequentemente, uma maior exposição ao risco de taxa de juro.¹³⁴

Embora reconheçamos que a abordagem pelo limite inferior ao modelo M-Quadrado representou um avanço relativamente aos tradicionais modelos de duração (reduz o risco de processo estocástico associado a choques não paralelos), não podemos deixar de referir que a metodologia padece de duas limitações principais. A primeira, já mencionada, respeita ao facto do limite inferior derivado em (5.8) apenas ser aplicável num contexto em que não são admitidas posições negativas na carteira. Esta hipótese, bastante restritiva, elimina automaticamente a possibilidade de efectuar vendas a descoberto e de tomar posições em contratos *forward* ou de futuros.¹³⁵

A segunda limitação, que decorre em certa medida das restrições impostas pela primeira, refere-se à impossibilidade de construir carteiras diversificadas com um M^2 nulo. Dito de outro modo, o modelo não permite, teoricamente, eliminar completamente o risco de taxa de juro.

(¹³⁴) Fong e Vasicek (1984, pp. 1543) ilustram esta propriedade analisando as características de uma carteira *barbell* e de uma carteira *bullet*. Respeitando a condição de imunização ambas as carteiras estão, na acepção tradicional, imunizadas contra choques paralelos sobre a EPTJ. Contudo, na presença de choques não paralelos o seu comportamento é diametralmente oposto. Para comprovar esta afirmação suponhamos, por exemplo, que ocorre um choque positivo sobre a inclinação. Neste cenário, são esperadas reduções no valor terminal de ambas as carteiras, e isto porque para além de enfrentar taxas de reinvestimento mais baixas o investidor sofre perdas de capital decorrentes da diminuição do valor de liquidação. É de prever, não obstante, que o declínio experimentado seja bastante mais acentuado na carteira *barbell*, justificando-se esta assimetria por duas ordens de razões. A primeira está associada ao facto de esta carteira estar exposta às taxas de reinvestimento durante intervalos de tempo bastante mais longos do que a carteira *bullet*. A segunda é claramente perceptível recordando que, no final do HTI, a parcela ainda não reembolsada da carteira *barbell* é substancialmente superior à da carteira *bullet*, sujeitando deste modo o investidor a perdas de capital mais significativas. Para uma análise econométrica do desempenho de carteiras *barbell* e *bullet* veja-se, por exemplo, Mann e Ramanlal (1997).

(¹³⁵) Uma solução alternativa para criar, de forma implícita, posições negativas consiste em adquirir opções de venda (*put options*) sobre obrigações. Esta escolha apresenta a vantagem, face à opção de vendas a descoberto (ou aos contratos de futuros), de não requerer qualquer tipo de colateral.

Referência final para o facto de, como referem Nawalkha e Chambers (1996) e Balbás e Ibáñez (1998), a metodologia empregada por Fong e Vasicek para obter o limite inferior para os retornos da carteira não ser única. Exemplo disso são os métodos alternativos usados na derivação dos modelos do M-Absoluto e do Ñ.

5.2.2. Derivação do Modelo a Partir de uma Expansão em Série de Taylor

Retomemos o valor de B_H dado por (5.7). Fong e Vasicek (1984) demonstram que a variação no valor final da carteira pode ser representada por:

$$\frac{\Delta B_H}{B_H} = \frac{\sum_{t=1}^T c_t \cdot W_t \cdot F(t)}{\sum_{t=1}^T c_t \cdot W_t} \quad \text{onde} \quad F(t) = \exp \left[\int_t^H \Delta i(\tau) d\tau \right] - 1 \quad (5.11)$$

com todas as variáveis a assumir o significado antes atribuído. Se efectuarmos uma expansão em série de Taylor para $F(t)$, em torno de H , e substituirmos em (5.11) obtemos, fazendo uso da definição de M^2 obtida em (5.9), a seguinte equação:

$$\frac{\Delta B_H}{B_H} = -(D - H) \cdot \Delta i(H) - \frac{1}{2!} M^2 \left[\frac{d(\Delta i)}{dt} - (\Delta i)^2 \right]_{t=H} + \varepsilon_P \quad (5.12)$$

onde D , a duração de Fisher e Weil, é agora representada por:

$$D = \frac{1}{B_0} \sum_{t=1}^T t \cdot c_t \cdot W_t \quad (5.13)$$

e onde ε_P representa as parcelas residuais na aproximação. A equação (5.12) insinua assim, claramente, que é possível imunizar o valor final do investimento contra o risco de taxa de juro escolhendo um valor apropriado para a duração e para o M-Quadrado, e

considerando que o termo residual é insignificante. Se admitirmos que ao investidor é concedida a possibilidade de tomar posições negativas nos activos, a tarefa de seleccionar a carteira que satisfaz as *duas condições de imunização* - $D = H$ e $M^2 = 0$ - é facilitada.¹³⁶ Se eliminarmos esta faculdade, a única forma de o investidor satisfazer simultaneamente as duas condições de imunização passa pela aquisição de uma obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTI.

Paradoxalmente, a existência dessa obrigação significaria que a estratégia de imunização seria desnecessária. Para qualquer outra combinação de obrigações o M^2 será sempre positivo. Em face deste raciocínio, as condições de imunização para uma carteira diversificada são satisfeitas minimizando o valor do M^2 , sujeito à restrição $D = H$.

A principal crítica apontada a esta abordagem ao modelo do M-Quadrado prende-se com a hipótese de que o termo residual na aproximação (5.12) é insignificante. A juntar a esta crítica, Bierwag, Kaufman e Latta (1987), Fooladi e Roberts (1992), e Gagnon e Johnson (1994) defendem que, de entre as múltiplas carteiras que satisfazem a restrição de duração, aquela que exhibe melhor desempenho corresponde à carteira que contém uma obrigação com maturidade igual ao HTI, e não à que tem menor M^2 .¹³⁷

(¹³⁶) No capítulo 7 teremos oportunidade de verificar que este resultado é funcionalmente equivalente ao modelo de dois factores de Bierwag *et al.* (1987), e ao modelo do vector de duração de Chambers *et al.* (1988) e Prisman e Shores (1988) incluindo apenas os dois primeiros elementos do vector de duração.

(¹³⁷) O suporte teórico para este argumento só seria avançado por Bierwag, Fooladi e Roberts (1993), que demonstram que o modelo M^2 só é apropriado para determinados processos estocásticos, designadamente para o processo aditivo de Fisher e Weil considerando dois factores. Acrescentam ainda que a carteira que minimiza o M^2 só corresponde a uma carteira do tipo *bullet* nos casos em que, para o conjunto das carteiras imunizantes, o M^2 é uma função estritamente convexa da duração. Gagnon e Johnson (1994) interpretam este resultado sugerindo que, para as obrigações com maturidade igual ao HTI, a incerteza sobre os efeitos produzidos pelos choques de taxa de juro no valor terminal do investimento é nula, uma vez que para esta obrigação o HTI coincide com o momento de pagamento do último cash flow.

As limitações do modelo do M-Quadrado motivaram desenvolvimentos importantes na teoria da imunização, dos quais destacamos, pela sua afinidade, o modelo M-Vector proposto por Nawalkha e Chambers (1997).

5.3. Modelo do M-Absoluto

Usando um procedimento análogo ao proposto por Fong e Vasicek (1984), Nawalkha e Chambers (1996) propõem uma estratégia alternativa para reduzir o risco de imunização, derivando um novo limite inferior para as variações percentuais no valor final do investimento. Este limite assenta no conceito de *M-Absoluto*¹³⁸, M^A , e pode ser representado pela seguinte desigualdade:

$$\frac{\Delta B_H}{B_H} \geq -K_3 \cdot M^A \quad (5.14)$$

onde:

$$M^A = \frac{1}{B_0} \sum_{t=1}^T c_t \cdot W_t \cdot |H - t| \quad (5.15)$$

e onde as seguintes restrições devem ser respeitadas:

$$\begin{cases} i) & K_3 = \text{Max}[|K_1|, |K_2|] \quad \text{s.a.} \quad K_1 \leq \Delta i(t) \leq K_2, \quad \forall t \geq 0 \\ ii) & c_t \geq 0, \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

A restrição (i) define os limites inferior e superior para a variação (absoluta) nas taxas de juro *forward*, isto é, delimita a parcela em (5.14) que se encontra fora do controlo do investidor. A restrição (ii) elimina, à semelhança do que fazem Fong e Vasicek, a possibilidade de incluir posições negativas na carteira.

(¹³⁸) Em jeito de curiosidade, refira-se que a introdução do conceito do M-Absoluto na literatura sobre imunização é atribuída a Fong e Vasicek (1983), no contexto da formulação da estratégia de imunização considerando múltiplos pagamentos. Na derivação original (*op. cit.*, pp. 233), o conceito expresso em (5.15) é designado por *Mean Absolute Deviation* (MAD).

A principal inovação deste modelo reside no conceito de M^A que constitui, tal como o M^2 , uma medida de dispersão (desvio) dos cash flows em torno do HTI. Difere do conceito de M^2 no sentido em que fornece uma medida dos desvios absolutos, e não dos desvios quadráticos (variância). A redução do risco de imunização implica, também neste caso, a minimização do M^A .¹³⁹ Em termos formais, e considerando um HTI único, o problema do investidor pode ser representado por:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \left[\sum_{k=1}^J w_k M_k^A \right] \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{k=1}^J w_k = 1 \quad \text{e} \quad w_k \geq 0, \quad \forall k = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (5.16)$$

A diferença fundamental entre os modelos M^A e M^2 reside no facto da implementação do primeiro não exigir qualquer restrição de duração. Apesar disso, a minimização do M^A pressupõe, implicitamente, a minimização dos desvios entre a duração da carteira e o HTI.¹⁴⁰

(¹³⁹) À semelhança do que acontece no modelo do M-Quadrado, a exclusão de posições negativas torna a imunização perfeita no modelo M-Absoluto ($M^A = 0$) possível apenas nos casos em que a carteira é constituída por uma única obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTI.

(¹⁴⁰) Em face deste raciocínio, a supremacia de um modelo sobre o outro dependerá sempre da natureza dos choques de taxa de juro esperados. Se os choques forem do tipo paralelo e infinitesimal, então é de prever que o modelo M^A revele um desempenho ligeiramente inferior ao modelo M^2 (com $D_{FW} = H$) dado que, nesta situação, o modelo M^2 permite a imunização perfeita enquanto que o modelo M^A apenas possibilita a redução do risco de imunização. Num cenário em que os choques são do tipo não paralelo (afectam o nível, a inclinação, a curvatura e outros parâmetros da forma da EPTJ), a supremacia do modelo M^A sobre o modelo M^2 parece evidente. Efectivamente, a circunstância do modelo M^A apenas imunizar parcialmente contra choques sobre o nível é compensada pela redução do risco de imunização inerente a alterações na inclinação e outros parâmetros da EPTJ. Tal como sublinham Nawalkha e Chambers (1996, pp.7), o facto de no modelo M^A o investidor ser confrontado com um problema de optimização não condicionada (não existe restrição de duração), o que contrasta claramente com a optimização condicionada do modelo M^2 , faz supor que a carteira seleccionada pelo modelo M^A concentrará os seus cash flows de forma mais acentuada (relativamente ao modelo M^2) em torno do HTI, minorando, deste modo, o risco de processo estocástico. Em termos práticos, o modelo M^A apresenta ainda a vantagem adicional de oferecer sempre (mesmo nos casos em que as posições negativas são negadas) uma solução óptima para o problema de minimização.

Nawalkha e Chambers testaram empiricamente o desempenho da estratégia de imunização baseada nos modelos M^A e de Fisher e Weil. Os resultados obtidos confirmam a superioridade do modelo M^A , reduzindo este em mais de metade (na amostra usada) o risco de imunização subjacente aos tradicionais modelos de duração.

5.4. Modelo do \tilde{N} de Balbás e Ibáñez

Balbás e Ibáñez (1998) dão sequência aos trabalhos de Fong e Vasicek (1984) e Nawalkha e Chambers (1996) e propõem, supondo de novo que o conjunto de choques admissíveis sobre as taxas de juro *forward* é limitado, uma nova estratégia de imunização baseada na medida de dispersão \tilde{N} . Designemos por $\lambda > 0$ o parâmetro de volatilidade que determina a dimensão máxima aceite para um choque sobre as taxas de juro. O conjunto dos choques admissíveis é definido por: $K = \{k(t) : |k(t_1) - k(t_2)| \leq \lambda\}$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, onde $k(t)$ representa uma função integrável em ordem a t .

Os autores provam que o conjunto dos *piores* choques admissíveis para as taxas de juro é dado por: $k_0(t) = 1$ e $k_1(t) = \left\{ -\frac{\lambda}{2}, t < H; \frac{\lambda}{2}, t \geq H \right\}$. Ou seja, o choque é negativo para prazos anteriores ao HTI e positivo para os prazos posteriores, i.e., o modelo configura alterações positivas na inclinação da EPTI]. Nestas condições, Balbás e Ibáñez demonstram que o limite inferior para as variações no valor terminal do investimento é representado por:

$$\frac{\Delta B_H}{B_H} \geq \lambda_0(H - D) - \frac{\lambda}{2} \tilde{N} \quad (5.17)$$

onde:

$$\tilde{N} = \frac{1}{B_0} \int_0^T c_t \cdot \exp \left[- \int_0^t i(\tau) d\tau \right] |t - H| dt \quad (5.18)$$

simboliza uma medida de dispersão dos cash flows em torno da duração, e as demais variáveis têm o significado habitual. Como facilmente se verifica, a definição da medida \tilde{N} é exactamente igual à definição do M^A de Nawalkha e Chambers (1996).¹⁴¹ Se o investidor respeitar a restrição de duração, o limite inferior passa a ser dado por:

$$\frac{\Delta B_H}{B_H} \geq - \frac{\lambda}{2} \tilde{N} \quad (5.19)$$

Em função destes desenvolvimentos, os autores sugerem que a estratégia de imunização mais adequada selecciona, de entre todas as carteiras que satisfazem a restrição de duração, aquela que minimiza o valor da medida \tilde{N} . Ao fazê-lo consegue-se, não apenas uma protecção completa contra choques aditivos sobre a EPTJ, mas também uma redução do risco de processo estocástico.

Balbás e Ibáñez enfatizam ainda algumas das vantagens do seu modelo face ao modelo do M^2 . Desde logo o facto de os choques “limite” considerados (λ) poderem ser interpretados como uma medida de volatilidade e, como tal, serem passíveis de estimação empírica.¹⁴² A esta característica juntam o facto dos piores choques admitidos por Fong e Vasicek serem pouco prováveis numa situação real.¹⁴³

(141) Os autores aparentam desconhecer o trabalho de Nawalkha e Chambers (1996).

(142) Recordamos que no modelo do M-Quadrado o parâmetro dos choques correspondia a uma derivada de uma função, com interpretação económica bastante mais difícil.

(143) Segundo estes autores, os choques admitidos por Fong e Vasicek envolvem deslocamentos demasiado grandes para as taxas de juro correspondentes a prazos muito afastados do HTI. Referência final para o facto do modelo do \tilde{N} acomodar perfeitamente uma carteira que satisfaz a restrição de duração e, simultaneamente, incorpora uma obrigação com maturidade igual ao HTI sendo, desta forma, compatível com os já mencionados resultados empíricos de Bierwag, Fooladi e Roberts (1993).

6. Os Riscos Associados ao Fenómeno da Convexidade

Como é sabido, a relação entre o preço de uma obrigação e a TRA à qual esta é transaccionada no mercado é não linear e convexa. Significa isto que a sua inclinação, medida pelo declive da recta tangente à curva num determinado ponto, não é, tal como alvitra o modelo de duração de Macaulay, constante ao longo de todo o seu domínio.

Em face deste raciocínio, a utilização do conceito de duração para aproximar as variações no preço de uma obrigação apenas pode ser relevada num contexto local, isto é, para pequenas variações nas taxas de juro.¹⁴⁴ Para oscilações significativas, a estimativa fornecida pela duração envolve sempre algum erro, erro esse que pode ser capturado incorporando a convexidade e termos de ordem superior na aproximação.¹⁴⁵ Discutimos, em seguida, as diferentes visões sobre o fenómeno da convexidade.

6.1. Visão Tradicional da Convexidade

A *visão tradicional* da convexidade, expressa por exemplo nos trabalhos de Fabozzi (1988;2000), Garbade (1985a), Douglas (1990), Milgrom (1985), Bierwag *et al.* (1988), Grantier (1988), Kritzman (1992), Levin (1985) e Winkelmann (1989), está fundada no argumento de que a convexidade é uma característica desejável nas obrigações, mas que

(¹⁴⁴) Recordar-se, a propósito, que a inclinação da recta tangente à curva que relaciona o preço da obrigação e a TRA corresponde, em termos matemáticos, à primeira derivada da função de preço com respeito à taxa de juro.

(¹⁴⁵) Bierwag, Kaufman e Latta (1988, pp. 52) sublinham que o número de termos a incluir na aproximação será sempre determinado pela relação custo benefício de cada investidor. Os benefícios são mensuráveis, como seria de esperar, pela melhoria na qualidade da aproximação. Os custos compreendem, quer o aumento da complexidade computacional, quer o aumento dos custos de transacção inerentes a estratégias de imunização (ou cobertura) baseadas em modelos multifactor, ou em modelos com termos de ordem superior na expansão de Taylor.

para a obter os investidores devem estar dispostos a aceitar um preço em termos de retorno. A seguinte afirmação sintetiza esta visão: «*The Benter is Better*».¹⁴⁶ Regra geral, a desejabilidade da convexidade encontra suporte analítico em hipóteses demasiado restritivas (e inconsistentes com o equilíbrio) para o comportamento das taxas de juro, nomeadamente que os choques são do tipo paralelo e não infinitesimal.

6.1.1. Definição e Cálculo da Convexidade

Consideremos que a EPTJ, $i(t)$, é uma função contínua e diferenciável com respeito ao tempo até à maturidade das obrigações. Pelo *Teorema de Weirstrass* sabemos que qualquer função contínua e “suave” de uma variável independente pode ser expressa em termos de uma função polinomial dessa mesma variável.¹⁴⁷ Com base nestes resultados, se efectuarmos uma expansão de Taylor para a EPTJ, em torno de $t = 0$, ficamos com:

$$i(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \dots + A_k t^k \quad (6.1)$$

onde:

$$A_j = \frac{1}{j!} \left[\frac{d^j G(t)}{dt^j} \right]_{t=0}, \quad j = 0, \dots, k$$

e onde $i(t)$ denota a taxa *spot* a aplicar, em regime de capitalização contínua, a um empréstimo de prazo t . Os coeficientes A_0 , A_1 , A_2 medem, respectivamente, o nível (a altura), a inclinação, e a curvatura da EPTJ no momento actual.¹⁴⁸

⁽¹⁴⁶⁾ Grantier (1988, pp. 79).

⁽¹⁴⁷⁾ Vasicek e Fong (1982), Shea (1984;1985) e Chambers, Carleton e Waldman (1984) provaram que é possível representar a EPTJ através de funções exponenciais e exponenciais de polinómio.

⁽¹⁴⁸⁾ Os coeficientes de ordem superior não têm uma interpretação simples mas são importantes para melhorar a qualidade do ajustamento da EPTJ. Chambers *et al.* (1984) concluem que a inclusão de termos na função polinomial (para além do quarto) não melhora significativamente o ajustamento da equação (6.1), excepto para os segmentos mais “*distantes*” da EPTJ.

Se adoptarmos o regime de capitalização contínua (com cash flows discretos), e considerarmos que a EPTJ é bem definida por (6.1), o preço de uma obrigação clássica pode ser expresso por:

$$B(i) = \sum_{t=1}^T c_t \cdot \exp[-(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \dots + A_k t^k) \cdot t] \quad (6.2)$$

A visão tradicional da convexidade é obtida assumindo que a EPTJ apenas está sujeita a choques do tipo aditivo. Com base em (6.1), um choque aditivo é caracterizado por uma variação instantânea e não infinitesimal no coeficiente A_0 , mantendo os demais parâmetros inalterados. A variação no preço da obrigação induzida por este choque pode ser estimada através de uma *aproximação linear*¹⁴⁹ de Taylor com respeito a A_0 :

$$B_t = B_0 + \frac{dB}{dA_0} \Delta A_0 + \frac{1}{2!} \frac{d^2 B}{dA_0^2} (\Delta A_0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 B}{dA_0^3} (\Delta A_0)^3 + \dots + \quad (6.3)$$

Se calcularmos as derivadas, dividirmos ambos os lados de (6.3) pelo preço da obrigação, e desprezarmos os termos de ordem superior ao segundo¹⁵⁰, ficamos com:

$$\frac{\Delta B(i)}{B(i)} \cong -D_m \cdot \Delta A_0 + \frac{1}{2} C \cdot (\Delta A_0)^2 \quad (6.4)$$

(¹⁴⁹) Reitano (1991) e Barber (1995) propõem uma metodologia alternativa – *aproximação exponencial* – procedendo, nomeadamente, uma expansão em série de Taylor para o logaritmo natural do preço da obrigação com respeito à TRA, ou seja, a:

$$\ln B_t = \ln B_0 + \frac{1}{B_0} \frac{dB}{di} (\Delta i) + \frac{1}{2!} \left[-\frac{1}{B_0^2} \left(\frac{dB}{di} \right)^2 + \frac{1}{B_0} \frac{d^2 B}{di^2} \right] (\Delta i)^2$$

Arrumando os termos e substituindo as definições de duração modificada e convexidade obtidas em (4.4) e (6.5), respectivamente, a equação acima toma a seguinte representação:

$$\frac{\Delta B(i)}{B(i)} \cong \exp \left\{ -D_m \cdot \Delta i + \frac{1}{2} (C - D_m^2) (\Delta i)^2 \right\} - 1$$

(¹⁵⁰) Os termos de ordem superior ao segundo em (6.3) são desprezados uma vez que para pequenas variações em A_0 o seu valor é insignificante.

O termo C em (6.4) é conhecido por *convexidade* de uma obrigação. A convexidade pode ser calculada, em *regime de capitalização contínua*¹⁵¹, através da seguinte fórmula:

$$C = \frac{1}{B(i)} \frac{d^2 B(i)}{di^2} = \frac{1}{B(i)} \sum_{t=1}^T t^2 c_t \cdot e^{-t \cdot i(t)} \quad (6.5)$$

Como se observa pela equação (6.5), a curvatura da *função preço-taxa de juro* ($d^2 B(i) / di^2$) é medida, não pela convexidade (C), como é comum encontrar-se nos manuais de finanças, mas pela denominada “*dollar convexity*”, ou seja, por $[C \times B(i)]$.¹⁵²

6.1.2. Propriedades e Determinantes da Convexidade

Os factores que influenciam a convexidade de uma obrigação clássica¹⁵³ não diferem substancialmente dos anteriormente apontados para a duração de Macaulay, e podem ser enunciados, segundo Fabozzi (1988;2000), Garbade (1985a) e Crack e Nawalkha (1999), pelas seguintes propriedades:

(¹⁵¹) Existe uma expressão equivalente a (6.5) considerando o *regime de capitalização discreta* (anual). Em termos formais, ela é dada por:

$$C = \frac{1}{B(i)} \frac{d^2 B(i)}{di^2} = \frac{1}{B(1+i)^2} \sum_{t=1}^T t(t+1)(1+i)^{-t}$$

Referência ainda para o facto de, à semelhança do que acontece para a duração de Macaulay, fórmulas fechadas para o cálculo da convexidade terem sido propostas, entre outros, por Nawalkha e Lacey (1988;1990), Blake e Orszag (1996), Nawalkha, Lacey e Schneeweis (1990) e Fabozzi (1988;2000).

(¹⁵²) Equívoco semelhante é cometido quando se afirma que a convexidade representa, por si só, a taxa de variação da duração em resultado de alterações na taxa de juro. Efectivamente, demonstra-se que, em regime de capitalização contínua, a 1ª derivada da duração com respeito à TRA é dada por:

$$\frac{dD}{di} = D^2 - C$$

(¹⁵³) Para qualquer TRA, a convexidade de uma obrigação de cupão zero é sempre igual ao quadrado do seu tempo até à maturidade.

Prop. 1: *Existe uma relação inversa entre a convexidade e a TRA, isto é, à medida que a TRA aumenta (diminui), a convexidade de uma obrigação clássica diminui (aumenta). Esta propriedade é apelidada de convexidade positiva.*¹⁵⁴

Prop. 2: *Para uma dada taxa de juro e maturidade, quanto maior for a taxa de cupão da obrigação tanto menor será a sua convexidade.*

Prop. 3: *A dimensão temporal da convexidade de uma obrigação é dada em (anos)².*

Prop. 4: *Para uma dada TRA e duração de Macaulay, quanto mais baixa for a taxa de cupão, tanto menor será a convexidade.*¹⁵⁵

Prop. 5: *A convexidade de uma obrigação diminui à medida que a obrigação se aproxima do vencimento, mas fá-lo, à semelhança da duração, de forma descontínua e com saltos.*

Para além destes determinantes, existe ainda um conjunto de factores que influenciam o comportamento da convexidade. Analisemos, em primeiro lugar, a relação entre a convexidade, a duração de Macaulay e a medida de dispersão S . Demonstra-se que a convexidade pode ser definida por:

$$C = \frac{1}{(1+i)^2} [S + D(D+1)] \quad (6.6)$$

(¹⁵⁴) Assinale-se que esta propriedade apenas é válida para obrigações com uma função preço-taxa de juro convexa. Tal como perfilham Grantier (1988) e Winkelmann (1989), obrigações com uma curva côncava (por exemplo, obrigações com opção de reembolso antecipado) exibem aquilo que muitas vezes se denomina de *convexidade negativa*.

(¹⁵⁵) Esta propriedade tem um importante corolário, posto em destaque quando se analisam as relações entre a convexidade, a dispersão e a duração. **Corolário:** *as obrigações de cupão zero são, de entre todas aquelas que têm a mesma duração, as que exibem menor convexidade.* Tal é assim porquanto a dispersão dos seus cash flows em torno da duração é nula.

Comprova-se, deste modo, que *existe uma relação positiva entre a convexidade e a duração*. Mais, a relação é não linear e uma função crescente (quadrática) da duração. A equação (6.6) permite ainda constatar que *a convexidade depende positivamente da medida de dispersão S* . Significa isto que a convexidade será tanto maior quanto maior for a dispersão dos tempos de pagamento da obrigação em torno da sua duração.¹⁵⁶

A juntar a estes elementos devemos adicionar, segundo Douglas (1990), a relação positiva que existe entre a volatilidade das taxas de juro e os efeitos da convexidade (em especial nas obrigações de elevada duração), e os efeitos assimétricos que sobre a convexidade são produzidos em consequência de modificações nas taxas de juro. Efectivamente, os efeitos de uma descida nas taxas de juro sobre a convexidade são, em termos relativos, mais pronunciados do que no caso de uma subida nas taxas de juro.

6.1.3. Valor da Convexidade e Implicações Para a Estratégia de Imunização

A importância da convexidade no contexto tradicional é justificada de duas formas. Em primeiro lugar, a inclusão do termo C em (6.4) permite capturar a maior parte da volatilidade do preço de uma obrigação que não é explicada pela duração modificada. Em segundo, e porque termo $(\Delta A_0)^2$ em (6.4) é sempre positivo, na presença de choques aditivos sobre a EPIJ a convexidade será sempre benéfica para o investidor.¹⁵⁷ Para melhor avaliarmos o significado destas conclusões examinemos, no contexto da estratégia de imunização, os efeitos de um choque aditivo sobre o valor terminal da

⁽¹⁵⁶⁾ A justificação para este resultado baseia-se no facto de os cash flows mais afastados no tempo revelarem uma convexidade crescente.

⁽¹⁵⁷⁾ De facto, verifica-se que nestas condições quanto maior for o valor da convexidade tanto maior será o aumento no preço de uma obrigação em consequência de uma diminuição da taxa de juro, e tanto menor será a descida no preço em resultado de uma subida da taxa de juro.

carteira. Sob as hipóteses da teoria das expectativas puras, e assumindo que não ocorre qualquer alteração na EPIJ durante o HTI, o valor final da carteira é definido por:

$$B_H = \sum_{t=1}^T c_t \cdot \exp[A_0(H-t) + A_1(H^2-t^2) + A_2(H^3-t^3) + \dots +] \quad (6.7)$$

Adoptando procedimentos similares aos usados para derivar (6.4), a aproximação linear às variações de B_H (em resultado de uma alteração em A_0) é dada por:

$$\frac{\Delta B_H}{B_H} \cong (H-D) \cdot \Delta A_0 + \frac{1}{2}(C - 2HD + H^2) \cdot (\Delta A_0)^2 \quad (6.8)$$

Na presença de choques aditivos sobre a EPIJ o valor terminal encontra-se imunizado se a duração da carteira for igual ao HTI, i.e., se $D = H$. Nesse caso, (6.8) dá lugar a:

$$\frac{\Delta B_H}{B_H} \cong \frac{1}{2}(C - H^2) \cdot (\Delta A_0)^2 \cong \frac{1}{2}M^2 \cdot (\Delta A_0)^2 \quad (6.9)$$

Na equação (6.9) a parcela $(C - H^2) = M^2$ é tanto mais positiva quanto maior for a convexidade da carteira. Dado que um valor superior para $(C - H^2)$ se traduz, de acordo com (6.9), num retorno mais elevado para a carteira, para choques aditivos a maximização da convexidade (ou, de forma equivalente, do M^2) será sempre um objectivo apropriado para a estratégia de imunização.¹⁵⁸ Atente-se no *paradoxo* desta conclusão quando analisada à luz das recomendações de Fong e Vasicek (1984).

(¹⁵⁸) Registe-se que esta conclusão é, ao contrário daquilo que vimos para a duração, independente da dimensão do HTI, ou seja, o valor da convexidade é independente do HTI pelo que esta deve ser, simplesmente, maximizada. Garbade (1985a) efectua, contudo, alguns reparos a esta conclusão. Segundo o autor a convexidade apenas é benéfica nos casos em que a EPIJ sofre um choque paralelo significativo e depois permanece inalterada ao nível atingido. Na eventualidade dos choques sobre a EPIJ serem relativamente suaves e contínuos, e caso o investidor opte por reajustar frequentemente a composição da sua carteira por forma a preservar o *match* de duração, os ganhos proporcionados pela convexidade são insignificantes. Maloney e Logue (1989) atestam, empiricamente, estas conclusões. Hedge e Nunn (1988) concluem que, mesmo nos casos em que a hipótese de deslocamentos paralelos sobre a EPIJ é acertada, os ganhos esperados de uma estratégia caracterizada por elevada convexidade são reduzidos.

A função objectivo e as restrições do problema corresponderiam, neste caso, a:¹⁵⁹

$$\begin{aligned} \text{Max } C_P &= \sum_{k=1}^J w_k C_k \\ \text{s.a. } \sum_{k=1}^J w_k D_k &= H, \quad \sum_{k=1}^J w_k = 1, \quad w_k \geq 0 \quad (k=1, \dots, J) \end{aligned} \quad (6.10)$$

onde C_k e C_P denotam a convexidade da obrigação k e da carteira, respectivamente.

Ao argumento, indubitavelmente poderoso, que sustenta a desejabilidade da convexidade, contrapõem Ingersoll *et al.* (1978) a opinião de que este resultado é “*demasiado bom para ser verdadeiro*”. Com efeito, nestas condições a convexidade não teria um preço, violando assim uma das premissas base do equilíbrio nos mercados.

Neste sentido, se se considera que a convexidade é um atributo desejável da carteira, então deve aceitar-se, em contrapartida, que num mercado competitivo as hipóteses de arbitragem são rapidamente eliminadas, pelo que a convexidade deve ter um preço (um custo de oportunidade). Esse preço consistirá, obviamente, na aceitação de um retorno inferior. Citando Levin (1985, pp. 271), «*A bond with high convexity should have a lower yield and vice versa. In particular, bonds with equal duration should not necessarily have the same yield*».

6.1.4. Estratégia de Cobertura do Risco de Taxa de Juro

A metodologia de cobertura do risco de taxa de juro apresentada no **Anexo 1** pode ser facilmente generalizada por forma a abarcar os casos em que a EPIJ é não horizontal

(¹⁵⁹) Admitindo que o processo estocástico seguido pelas taxas de juro contempla choques sobre cada taxa *spot* que são proporcionais a 1 mais o seu respectivo valor, Zaremba (1998) e Zaremba e Smolenski (2000) demonstram que a carteira que exhibe maior convexidade (e, conseqüentemente, com taxa de retorno não antecipado mais elevada), de entre todas aquelas que satisfazem a habitual restrição de duração, corresponde a uma carteira do tipo *barbell*, constituída por apenas duas obrigações.

preservando, não obstante, e tal como é suposto pela visão tradicional da convexidade, a hipótese simplificadora de que os choques sobre a EPTJ são do tipo paralelo. Neste caso, o vector dos factores de risco toma a seguinte representação: $a_t^k = (i_t^k)^T$, $k = 1, \dots, K$ onde $i_t^k \equiv i(t, T)$ denota a taxa *spot*. A hipótese de que a EPTJ apenas é afectada por choques aditivos corresponde, em termos formais, a: $di_t^k = di$, $\forall k = 1, \dots, K$.

O objectivo do investidor consiste agora na protecção contra efeitos de 1ª e 2ª ordem (convexidade), apelando para tal a dois activos de cobertura (negligenciando a condição de autofinanciamento). Neste cenário, demonstra-se que a carteira óptima $q_t = (q_t^1 \quad q_t^2)$ satisfaz o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^K \left(\frac{dV_t}{di_t^k} + \sum_{j=1}^2 q_t^j \frac{dF_t^j}{di_t^k} \right) = 0 \\ \sum_{k,k'=1}^K \left(\frac{d^2 V_t}{di_t^k di_t^{k'}} + \sum_{j=1}^2 q_t^j \frac{d^2 F_t^j}{di_t^k di_t^{k'}} \right) = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

6.2. Visão Moderna da Convexidade

O carácter desejável da convexidade assenta, como vimos, no argumento de que os choques sobre a EPTJ são do tipo paralelo. Rejeitando este princípio, os percursores da *visão moderna* da convexidade, entre os quais destacamos Kahn e Lochoff (1990), Lacey e Nawalkha (1993) e Reitano (1993), demonstram que a consideração de um processo estocástico alternativo (consistente com as condições de equilíbrio) que admita, simultaneamente, choques sobre o nível e sobre a inclinação da EPTJ, é suficiente para revelar os potenciais riscos da convexidade. Para além deste aspecto, a visão moderna da convexidade reconhece a relação entre a curvatura da função preço-taxa de juro a e medida do risco M^2 , e introduz um novo elemento na análise – o valor temporal.

6.2.1. Convexidade, Modelo M^2 e Modelos Multifactor para a Estrutura por Prazos das Taxas de Juro

Para ilustrar os potenciais riscos associados à convexidade, seguimos de perto Lacey e Nawalkha (1993) e consideramos o caso mais simples em que ocorre um choque que afecta simultaneamente o nível e a inclinação da EPTJ, isto é, um choque que altera ao mesmo tempo os parâmetros A_0 e A_1 em (6.1).¹⁶⁰ Admitir que, quer o parâmetro de nível, quer o parâmetro da inclinação podem variar implica assumir, implicitamente, que os choques sobre a EPTJ são do tipo não paralelo e não infinitesimal. Para este tipo de choques, a variação no valor terminal da carteira pode ser aproximada efectuando uma expansão de Taylor (de 1ª e 2ª ordem) com respeito a A_0 e A_1 , ou seja:

$$\begin{aligned} \Delta B_H \cong & \frac{dB_H}{dA_0} \Delta A_0 + \frac{dB_H}{dA_1} \Delta A_1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 B_H}{dA_0^2} (\Delta A_0)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d^2 B_H}{dA_1^2} (\Delta A_1)^2 + \frac{dB_H}{dA_0 dA_1} (\Delta A_0)(\Delta A_1) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Se dividirmos ambos os lados de (6.12) por B_H podemos, desprezando os últimos dois termos no lado direito, expressar a equação em termos de duração e convexidade:

$$\frac{\Delta B_H}{B_H} \cong (H-D) \cdot \Delta A_0 + \frac{1}{2} (C - 2HD + H^2) \cdot (\Delta A_0)^2 + (H^2 - C) \cdot \Delta A_1 \quad (6.13)$$

A equação (6.13) clarifica bem a relação entre o M^2 , a convexidade e a volatilidade-preço de uma obrigação, dado que $M^2 = C - 2HD + H^2$. Se recuperarmos a condição de imunização, $D = H$, a equação acima pode ser simplificada para dar lugar a:

⁽¹⁶⁰⁾ A razão pela qual não consideramos coeficientes de ordem superior em (6.1) prende-se com o facto da convexidade, tal como esta foi definida em (6.5), não estar relacionada com esses parâmetros numa expansão em série de Taylor.

$$\frac{\Delta B_H}{B_H} \cong (C-H^2) \cdot \left[\frac{1}{2} (\Delta A_0)^2 - \Delta A_1 \right] \quad (6.14)$$

A equação (6.14) redefine o significado da convexidade e patenteia, claramente, as diferenças entre as visões clássica e recente do fenómeno. A visão tradicional, representada pelo termo $(\Delta A_0)^2/2$, sempre positivo, vincula a convexidade a variações não infinitesimais no nível das taxas de juro, e considerada-a um predicado desejável da carteira. Apesar de a equação (6.14) ser consistente com esta interpretação, verifica-se que ela introduz uma ligação adicional entre a convexidade e o retorno da obrigação, elo esse que corresponde às modificações na inclinação da EPTJ – o termo ΔA_1 .¹⁶¹

Neste sentido, se existir um desvio entre a convexidade da carteira imunizada e o seu nível óptimo (o quadrado do HTI) ou, de forma equivalente, se o $M^2 > 0$, os choques sobre a inclinação podem provocar um aumento do nível de risco do investimento. Em face deste raciocínio, os defensores da visão recente da convexidade defendem que a magnitude de ΔA_1 domina a magnitude de $(\Delta A_0)^2/2$, pelo que a desejabilidade da convexidade dependerá sempre do sinal da variação na inclinação da EPTJ.¹⁶²

Lacey e Nawalkha sublinham ainda o facto de, contrariamente à visão tradicional, a visão moderna da convexidade ser consistente com as condições de equilíbrio nos

(¹⁶¹) Lacey e Nawalkha (1993) chamam a esta ligação adicional *efeito risco*, por contraposição ao *efeito convexidade* presente na visão tradicional do fenómeno.

(¹⁶²) Assim sendo, os choques positivos sobre a inclinação ($\Delta A_1 > 0$) provocam uma redução no retorno do investimento, redução essa que será tanto maior quanto maior for a convexidade da carteira. Os choques negativos sobre a inclinação ($\Delta A_1 < 0$) aumentam, por seu turno, o retorno da carteira, e devolvem à convexidade o seu carácter desejável. Refira-se, a propósito, que os choques positivos sobre a inclinação são caracterizados por uma rotação da EPTJ em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, enquanto que os choques negativos correspondem a uma rotação da EPTJ no sentido dos ponteiros do relógio.

mercados. Tal é assim porquanto a desejabilidade da convexidade dependerá sempre do sinal do *efeito risco*. Concluem ainda, numa base empírica, que as carteiras com maior convexidade são também aquelas que exibem maior nível de risco de imunização.

A redefinição do significado da convexidade implica, naturalmente, reajustamentos na formulação da estratégia de imunização. Como se verifica pela equação (6.13), a imunização contra choques simultâneos sobre o nível e sobre a inclinação da EPTJ exige, agora, o *match* conjunto da duração e da convexidade. Segundo Lacey e Nawalkha (1993), o problema típico do investidor pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \left[\sum_{k=1}^J w_k^2 \right] \\ \text{s.a.} \quad & D = H \quad , \quad C = H^2 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^J w_k = 1 \end{aligned} \quad (6.15)$$

6.2.2. Convexidade e Valor Temporal

Os modelos de risco de taxa de juro veiculam, na sua esmagadora maioria, que a variabilidade do retorno de uma carteira em resultado de flutuações nas taxas de juro é determinada, exclusivamente, pela sua duração e convexidade, pelo que não incorporam o efeito decorrente da passagem do tempo.¹⁶³ Invertendo esta tendência, Christensen e Sørensen (1994), Chance e Jordan (1996) e Nawalkha (1999) acrescentam este efeito na formulação das estratégias de gestão do risco de taxa de juro. Christensen e Sørensen introduzem o conceito de “*valor temporal*” (*time value*), Θ , definindo-o como a sensibilidade do preço de uma obrigação em relação à passagem do tempo.¹⁶⁴

(163) A justificação invocada é simples: o elemento temporal é determinístico e não estocástico.

(164) No contexto da avaliação de opções sobre activos financeiros, a medida de risco correspondente é dada pelo *theta* de uma opção.

Em termos formais: $\Theta = \frac{dB}{dt} \frac{1}{B}$, com $B = B(t, i)$. Os autores demonstram, assumindo que o comportamento dinâmico das taxas de juro é descrito por um processo estocástico (de factor único) consistente com as condições de equilíbrio, que a presença do efeito temporal é suficiente para explicar a razão pela qual, mesmo na presença de choques paralelos sobre uma EPTJ não horizontal, o fenómeno da convexidade é compatível com a ausência de oportunidades de arbitragem.¹⁶⁵

Significa isto que, na medida em que os choques de taxa de juro se afastam do esperado, inclusive nos casos em que não se assiste a qualquer modificação na EPTJ, os potenciais ganhos associados à convexidade podem ser compensados pelas perdas decorrentes da passagem do tempo. Por outras palavras, existe um *trade-off* entre os ganhos proporcionados pela convexidade e o valor temporal da obrigação.

Christensen e Sørensen provam ainda, recorrendo a uma carteira com dois activos, que para uma carteira imunizada (no sentido convencional) existe uma relação única entre a convexidade e o valor temporal das obrigações que a integram. Mais concretamente:

$$\sigma_r^2 [C_1 - C_2] = \Theta_2 - \Theta_1 \quad (6.16)$$

onde σ_r^2 representa a variância do processo estocástico seguido pela taxa de juro *spot*, e C_j e Θ_j , ($j = 1, 2$), denotam, respectivamente, a convexidade e o valor temporal. A equação (6.16) merece, por parte dos autores (*op. cit.*, pp. 57), o seguinte comentário: «for

⁽¹⁶⁵⁾ A justificação apresentada é simples: apesar do valor de carteiras de obrigações, com o mesmo valor actual e duração, ser afectado de forma idêntica por variações infinitesimais nas taxas de juro, as carteiras podem revelar diferentes sensibilidades em relação à passagem do tempo. Deve salientar-se que os autores fundamentam as suas conclusões com base em exemplos específicos, não estando assegurada a sua generalidade.

two assets with the same duration, it follows that, when the convexity of asset 1 is larger than asset 2, the value of asset 1 rises less than the value of asset 2 for an unchanged interest rate. In other words, for a change in the interest rate, the relative convexity gain on asset 1 is matched by a smaller rise in the value for an unchanged interest rate».

Os resultados de Christensen e Sørensen sobre o *trade-off* entre a convexidade e o efeito *theta* ganharam, recentemente, uma fundamentação mais rigorosa, no domínio dos chamados modelos de não arbitragem para a EPTJ. Partindo de uma versão unifactorial do modelo de Heath, Jarrow e Morton (1992), Nawalkha (1999) prova que a consideração do efeito *theta* anula o impacto produzido pela convexidade no retorno da obrigação, e que nestas circunstâncias as oportunidades de arbitragem são eliminadas. O autor adverte, contudo, que a convexidade pode ter um preço, provando-o com base numa versão do modelo de HJM em que são usados dois factores para permitir a ocorrência de choques sobre o nível e sobre a inclinação da estrutura de taxas *forward*.¹⁶⁶

Numa perspectiva diferente, Chance e Jordan (1996) examinam os ganhos de eficiência na estimação da variabilidade do preço de uma obrigação, que resultam da adição do termo *theta* numa expansão em série de Taylor.¹⁶⁷ Recorrendo a simulações concluem, de forma inesperada, que em muitos casos a contribuição do efeito *theta* (e do termo cruzado) para a explicação da volatilidade supera a proporcionada pelo termo convexidade, e que, por esta razão, o elemento temporal deve figurar na análise dos retornos de uma obrigação.

⁽¹⁶⁶⁾ Segundo o autor, o preço da convexidade reflecte, neste contexto, um prémio exigido pelos investidores pela sua exposição a choques sobre a inclinação da EPTJ. Esta opinião corrobora os argumentos enunciados no ponto 6.2.1.

⁽¹⁶⁷⁾ São considerados apenas efeitos de 1ª e 2ª ordem, e o efeito combinado (cruzado) das modificações nas taxas de juro e da passagem do tempo.

7. Modelos Multifactor Independentes do Processo Estocástico

Os modelos de risco de taxa de juro unifactoriais são, do ponto de vista teórico, bastante atractivos, mas apresentam lacunas importantes no contexto da teoria da imunização, uma vez que incorporam uma única fonte de incerteza. A sua restrição mais significativa refere-se à assunção de correlação perfeita entre todas as taxas *spot* ao longo da EPTJ, uma hipótese que é rejeitada pela maioria dos estudos empíricos.

A parametrização do risco de taxa de juro por intermédio de modelos multifactor representa um avanço substancial na teoria, e uma primeira tentativa de corrigir as deficiências detectadas na aproximação pela duração e pela convexidade. O contributo desta nova abordagem pode ser aduzido por duas ordens de razões. Em primeiro lugar, e ao nível da qualidade da especificação do comportamento dinâmico das taxas de juro, os modelos multifactor introduzem factores adicionais para além das alterações no nível da EPTJ. Em segundo lugar, estes modelos são compatíveis com o conjunto dos atributos que reflecte, de forma mais adequada, a exposição de alguns activos aos movimentos na EPTJ. Referência final para o facto da maioria dos modelos incluídos nesta categoria ser consistente com as condições de equilíbrio nos mercados, fruto da sua independência relativamente ao processo estocástico seguido pelas taxas de juro.

7.1. Modelo de Cooper

O modelo de imunização paramétrica de Cooper (1977) merece ser destacado pelo seu carácter pioneiro na abordagem à estratégia de imunização. O modelo está alicerçado, desde logo, numa especificação para a EPTJ que considera como única variável

explicativa o tempo até à maturidade das obrigações. O autor propõe e analisa quatro formas funcionais simples para a EPTJ, envolvendo, no máximo, três parâmetros de configuração. A título de exemplo, Cooper sugere a seguinte função:

$$i(t) = A + (B/t) \times [1 - \exp(-Ct)] \quad (7.1)$$

onde A , B e C são parâmetros, e as demais variáveis têm o significado habitual. A única hipótese invocada pelo autor é a de que a EPTJ é bem representada por uma destas formas funcionais.¹⁶⁸

A incerteza no modelo reflecte-se no facto de se desconhecer, à partida, qual será o valor futuro dos parâmetros que determinam $i(t)$. Em função deste quadro, o cálculo da sensibilidade do preço da obrigação com respeito aos parâmetros da configuração de $i(t)$ permite construir um *vector de medidas de duração*, vector esse que integra, por exemplo, a tradicional duração de Fisher e Weil. Dito de outro modo, o modelo de duração imunizante de Fisher e Weil pode ser considerado um caso particular do modelo de Cooper, presumindo neste último que o único parâmetro da configuração da EPTJ susceptível de variar no tempo é o parâmetro de nível.

As medidas de duração derivadas por Cooper foram utilizadas na formulação de estratégias de imunização, asseverando o autor que o modelo multifactor possibilita, quando comparado com os modelos tradicionais, um aumento significativo do desempenho da imunização.

(¹⁶⁸) O autor testou as quatro formas funcionais com base nas séries de taxas de juro estimadas por Carleton e Cooper (1976) para o mercado norte-americano, tendo concluído que todas elas revelam idêntico poder explicativo.

7.2. Modelo do Vector de Duração

Garbade (1985b), Chambers, Carleton e McEnally (1988), Chambers e Carleton (1988) e Bierwag *et al.* (1988) generalizam o modelo paramétrico de Cooper por forma a permitir que a EPTJ seja especificada em termos de um número ilimitado de funções do tempo até à maturidade das obrigações.

7.2.1. Especificação Funcional do Modelo

A especificação funcional do modelo do vector de duração está cimentada, no seguimento dos ensinamentos apresentados no capítulo 6, numa representação da EPTJ através de exponenciais de polinómio.¹⁶⁹ Suponhamos então que, imediatamente após a realização do investimento, a EPTJ sofre um choque aleatório não paralelo e não infinitesimal. A nova curva de taxas, $i'(t)$, é dada por:

$$i'(t) = i(t) + \Delta i(t) \quad (7.2)$$

onde: $\Delta i(t) = \Delta A_0 + \Delta A_1 t + \Delta A_2 t^2 + \dots + \Delta A_k t^k$

e onde ΔA_j , $j = 0, \dots, k$, denota os choques sobre o nível, sobre a inclinação, e sobre outros parâmetros da EPTJ.

(169) Em jeito de curiosidade, registre-se que a formulação original do modelo do vector de duração, atribuída (erradamente) a Chambers *et al.* (1988), se baseia no uso de uma função polinomial (semelhante à apresentada em (6.1)) para aproximar, não a EPTJ, mas o *retorno* de uma obrigação de cupão zero, i.e., para estimar $[\tilde{i}(t) \cdot t]$. Dado que qualquer obrigação clássica (ou carteira de obrigações) pode ser expressa em termos de uma soma de obrigações de cupão zero, a função de retorno avançada por Chambers *et al.* pode, obviamente, ser usada para obter um vector de duração para obrigações clássicas. O passo seguinte na metodologia adoptada por Chambers *et al.* consistia em estimar a volatilidade do preço de uma obrigação mediante uma aproximação linear em torno do (hipotético) valor futuro do título. Segundo os autores, esta era uma forma de eliminar o elemento temporal na série de Taylor e melhorar a aproximação. Por razões de clareza de exposição e simplificação optámos, seguindo Prisman e Shores (1988) e Crack e Nawalkha (2000), por considerar a representação da EPTJ fornecida por (6.1) e pela realização da aproximação em torno do valor actual da obrigação.

Se substituirmos a equação (7.2) em (6.2), demonstra-se (vide **Anexo 2**) que a taxa de retorno (instantâneo) da obrigação, $\Delta B(\bar{i})/B(\bar{i})$ satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{\Delta B(\bar{i})}{B(\bar{i})} \cong -D(1)[\Delta A_0] - D(2)\left[\Delta A_1 - \frac{(\Delta A_0)^2}{2}\right] - D(3)\left[\Delta A_2 - (\Delta A_0)(\Delta A_1) + \frac{(\Delta A_0)^3}{3!}\right] - \dots - D(m)\left[\Delta A_{m-1} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{(\Delta A_0)^m}{m!}\right] \quad (7.3)$$

onde a duração (ou *momento*¹⁷⁰) de ordem m , $D(m)$, é definida por:¹⁷¹

$$D(m) = \frac{1}{B(\bar{i})} \sum_{t=1}^T t^m c_t \cdot e^{-t \cdot i(t)} \quad (7.4)$$

A equação (7.4) define o *modelo do vector de duração*. O retorno de uma obrigação é determinado pelo produto de um *vector de duração*, $[D(1), D(2), \dots, D(m)]$, por um *vector de choques* sobre os parâmetros que influenciam a configuração da EPTJ. O vector de duração depende apenas da composição da carteira e pode, por isso, ser gerido pelo investidor.¹⁷² O vector de choques é função das oscilações registadas nos parâmetros que caracterizam a EPTJ e está, obviamente, fora do controlo do investidor.

⁽¹⁷⁰⁾ Garbade (1985b), Kornbluth e Salkin (1994), e Grandville (2001) utilizam o termo *momento* (ou *momento de duração*) para designar a duração de ordem m definida por (7.4), efectuando um paralelismo com a interpretação que é dada a este conceito no domínio da estatística.

⁽¹⁷¹⁾ No que toca ao cálculo do vector de duração para uma carteira obrigacionista, $D(m)_p$, demonstra-se, invocando a inevitável propriedade da aditividade da duração, que este pode ser obtido mediante:

$$D(m)_p = \sum_{k=1}^J w_k D_k(m) \quad , \quad w_k = \frac{n_k B_k}{B_p} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^J w_k = 1$$

Soluções fechadas para o cálculo de $D(m)$ podem ser encontradas em Nawalkha e Lacey (1988).

⁽¹⁷²⁾ O primeiro elemento desse vector, $D(1)$, representa a tradicional duração de Fisher e Weil e está associado, como seria de esperar, apenas a choques paralelos de magnitude reduzida sobre a EPTJ - ΔA_0 . O segundo elemento, $D(2)$, define o já familiar conceito de convexidade e ilustra, de novo, as visões tradicional e recente do fenómeno. A duração de ordem m , $D(m)$, é definida como uma média ponderada do tempo (elevado à potência de ordem m) que medeia até ao pagamento dos cash flows da obrigação. O momento de ordem m pode ser interpretado, de forma alternativa, como a medida de duração efectiva associada a um choque sobre a EPTJ que é proporcional a $t^{(m-1)}$.

7.2.2. Estratégia de Imunização e Indexação

A representação da EPTJ por exponenciais de polinómio possibilita, quer a formulação de estratégias de investimento que imunizam, no sentido convencional, a carteira contra choques arbitrários do tipo não paralelo e não infinitesimal, quer a estruturação de investimentos de modo a replicar o comportamento de um índice de referência para o mercado obrigacionista. Considere-se um investidor com um HTI único¹⁷³ ($H < T$). O valor terminal da carteira pode ser representado por:

$$B_H = \left[\sum_{t=1}^T c_t \cdot e^{-(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_k t^k) \cdot t} \right] e^{(A_0 + A_1 H + A_2 H^2 + \dots + A_k H^k) \cdot H} \quad (7.5)$$

A derivação das *condições de imunização* implica uma avaliação dos requisitos (de 1ª e 2ª ordem) segundo os quais o valor terminal do investimento têm um mínimo. Em face deste raciocínio, se aplicarmos logaritmos a (7.5) demonstra-se que as condições de 1ª ordem¹⁷⁴ ($d \log B_H / dA_j = 0$) envolvem, de forma compacta, as seguintes restrições:

$$D(m) = H^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.6)$$

onde $D(m)$ é dada por (7.4). Para seleccionar a carteira óptima, Chambers *et al.* (1988) e

Prisman e Tian (1993) incorporam (7.6) no seguinte *problema de programação quadrática*.¹⁷⁵

(¹⁷³) O modelo do vector de duração é facilmente extensível a outros tipos de estratégias de investimento como sejam: a imunização múltipériodo, a imunização do balanço e a estratégia de imunização do GAP. Para mais detalhes veja-se Prisman e Tian (1993) e o capítulo 10.

(¹⁷⁴) As condições de 2ª ordem exigem que a matriz das segundas derivadas parciais (matriz hessiana), calculada no momento da realização do investimento, seja definida positiva.

(¹⁷⁵) Assumindo que os retornos das obrigações estão sujeitos a choques aleatórios independentes, normalmente distribuídos, e homocedáticos, Chambers *et al.* (1988) demonstram que a função objectivo $\text{Min} \sum_{k=1}^J w_k^2$ minimiza o impacto do risco não sistemático (e.g. risco de liquidez) na carteira. Esta formulação implica ainda, implicitamente, que ao investidor é facultada a possibilidade de tomar posições negativas nos activos. Para uma aplicação prática do modelo veja-se Chambers (1988).

$$\begin{aligned}
 & \text{Min} \quad \sum_{k=1}^J w_k^2 \quad (7.7) \\
 & \text{s.a.} \quad D = \begin{bmatrix} D(1) \\ D(2) \\ \dots \\ D(m) \end{bmatrix} = H = \begin{bmatrix} H^1 \\ H^2 \\ \dots \\ H^m \end{bmatrix} \\
 & \quad \sum_{k=1}^J w_k = 1
 \end{aligned}$$

onde D representa o vector de duração para a carteira, e as demais variáveis têm o significado habitual. A inclusão na carteira de um mínimo de $m+1$ obrigações distintas, i.e., $J \geq m+1$, é condição necessária para que o problema de imunização tenha uma solução.¹⁷⁶ Cada uma das igualdades em (7.6) exprime uma condição de imunização contra um choque peculiar sobre a EPTJ.¹⁷⁷ No limite, a imunização contra momentos de ordem progressivamente superior tende para uma estratégia de dedicação.

A simplicidade conceptual do modelo do vector de duração acomoda, sem problemas, a definição de uma estratégia de indexação. A *estratégia de indexação* define-se como uma técnica de estruturação de carteiras que visa replicar as características (em termos de

(¹⁷⁶) Para $J = m+1$, a função objectivo indicada em (7.7) não desempenha qualquer papel. Contudo, para $J > m+1$ (o que corresponde à situação mais comum) a função objectivo quadrática em (7.7) assegura a existência de uma solução única, e permite o já mencionado efeito de *diversificação* entre as diferentes emissões.

(¹⁷⁷) A igualdade $D(1) = H$ representa, por exemplo, a habitual condição de imunização contra choques aditivos. A igualdade $D(2) = H^2$ possibilita a imunização contra choques caracterizados pela adição de um monómio linear do tipo $\Delta i(t) = A_1 t$ à EPTJ, isto é, contra choques sobre a inclinação. A igualdade $D(3) = H^3$ imuniza o investidor na presença de choques sobre o parâmetro que define a curvatura da EPTJ, ou seja, choques sobre A_2 . As condições de imunização de ordem superior têm interpretação semelhante mas podem ser entendidas, de forma mais clara, reconhecendo, por um lado, que a estratégia de imunização, considerando um HTI único, equivale a replicar uma carteira constituída por uma única obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTI. Por outro, que a duração de ordem m para este tipo de obrigações é simplesmente igual a H^m . Ou seja, as condições de imunização expressas em (7.6) generalizam a um contexto multifactor a já mencionada equivalência funcional entre uma carteira imunizada e uma obrigação de cupão zero com vencimento no HTI.

risco e retorno) de um índice de referência para o mercado obrigacionista, minimizando a discrepância (*tracking error*) entre os desempenhos da carteira e do índice. Em termos analíticos, a utilização do modelo do vector de duração para escolher a *carteira indexante* óptima implica a resolução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{k=1}^J w_k^2 \\ & D(m) = D(m)_{\text{Index}} \quad , \quad m = 1, 2, \dots \\ \text{s.a.} \quad & \sum_{k=1}^J w_k = 1 \end{aligned} \tag{7.8}$$

onde $D(m)_{\text{Index}}$ representa a duração de ordem m para o índice de referência.¹⁷⁸ A precisão desejada para a estratégia determina a ordem de $D(m)$ a utilizar.

7.2.3. Cálculo da Sensibilidade Taxa de Juro para as Medidas de Duração

Crack e Nawalkha (2000) demonstram que o modelo do vector de duração faculta a determinação da sensibilidade face à taxa de juro das medidas de duração, nomeadamente da sua reacção a alterações nos parâmetros que definem a forma da EPTJ. Este exercício simples afigura-se-nos de uma utilidade especial, uma vez que permite estender, a um contexto multifactor, a análise das propriedades das medidas de risco de taxa de juro iniciada no ponto 4.1.3.

Prova-se que a sensibilidade da medida de duração de ordem m , $D(m)$, com respeito a alterações no nível, inclinação, curvatura, e outros parâmetros da EPTJ (ΔA_j) pode ser representada, em termos compactos, da seguinte forma:

⁽¹⁷⁸⁾ Uma vez conhecida a composição do índice obrigacionista, os valores de $D(m)_{\text{Index}}$ são facilmente calculados através da fórmula para a duração de uma carteira.

$$\frac{dD(m)}{dA_j} = D(m)D(j+1) - D(m+j+1) \quad (7.9)$$

O quadro 7.1 ilustra, recorrendo a alguns exemplos, as potencialidades deste resultado:

Quadro 7.1: Sensibilidade Taxa de Juro das Medidas de Duração

m	j	$\frac{\partial D(m)}{\partial A_j}$	Interpretação
1	0	$[D(1)]^2 - D(2)$	A sensibilidade da duração de Fisher e Weil face a alterações no nível de taxas de juro é igual ao quadrado da duração menos a convexidade.
1	1	$D(1) \times [D(2) - D(3)]$	A sensibilidade da duração de Fisher e Weil face a alterações na inclinação da EPTJ é dada pelo produto da duração pela diferença entre a convexidade e $D(3)$.
2	0	$D(1) \times [D(2) - D(3)]$	De forma surpreendente, a sensibilidade da convexidade face a alterações no nível de taxas de juro é igual à sensibilidade da duração face a alterações na inclinação.
2	1	$[D(2)]^2 - D(4)$	A sensibilidade da convexidade face a alterações na inclinação da EPTJ é igual ao quadrado da convexidade menos $D(4)$.

A equação (7.9) pode ainda ser usada para calcular a reacção da medida M^2 a alterações na EPTJ. Recordando que $M^2 = D(2) - 2HD(1) + H^2$, prova-se que:

$$\frac{dM^2}{dA_j} = [D(2) - 2HD(1)]D(j+1) - [D(j+3) - 2HD(j+2)] \quad (7.10)$$

7.2.4. Aplicações do Modelo

Para além de permitir obter uma versão generalizada da estratégia de imunização, o modelo do vector de duração fornece um dos mais clarividentes quadros conceptuais para a análise das características de risco de taxa de juro de activos financeiros.¹⁷⁹

⁽¹⁷⁹⁾ Nawalkha (1995) desenvolve uma versão em tempo contínuo do modelo do vector de duração para analisar as características de risco de taxa de juro de activos contingentes, designadamente de obrigações com opção incorporada e de opções sobre obrigações (para mais detalhes veja-se o capítulo 8). Prisman e Tian (1993) desenvolvem as condições de imunização do balanço contra choques não paralelos e não infinitesimais de taxa de juro, usando definições de vector de duração para activos e passivos similares às deduzidas em (7.4). Para mais detalhes sobre este tema veja-se o capítulo 10.

7.2.4.1. Contratos de Futuros sobre Obrigações de Cupão Zero

A aplicação do modelo do vector de duração à análise das características de risco de taxa de juro de contratos de futuros é devida a Chambers (1984).¹⁸⁰ A aquisição de contratos de futuros sobre obrigações é usada regularmente pelos gestores de carteira, não apenas para efectuar a cobertura de posições à vista, mas como forma de ajustar a duração da carteira ao nível desejado. Com efeito, através da compra (venda) de contratos de futuros é possível aumentar (diminuir) a duração da carteira.

Considere-se o caso mais simples de um contrato de futuros com vencimento no momento s , emitido sobre uma obrigação de cupão zero com maturidade em $(s + t)$.¹⁸¹ Tomando como referência a versão mais restrita do modelo de arbitragem *cost-of-carry*,¹⁸² o preço de equilíbrio do contrato de futuros, $F(s, t)$, é representado por:

$$F(s, t) = \frac{P(0, s + t)}{P(0, s)} \quad (7.11)$$

Retomando as representações polinomiais da EPTJ, antes e após a ocorrência do choque de taxas de juro, definidas em (6.1) e (7.2), respectivamente, e substituindo em (7.11), demonstra-se que o retorno da posição é dado por:

(¹⁸⁰) Para um conjunto de referências mais recentes sobre este tema ver, por exemplo, Rendleman (1999), Daigler e Cooper (1998a; 1998b) e Kishimoto (1998).

(¹⁸¹) Admitimos, por simplificação, que a obrigação de cupão zero é isenta de risco de incumprimento, e paga ao seu detentor uma unidade monetária no vencimento.

(¹⁸²) A versão mais restrita do modelo *cost-of-carry*, analisada em detalhe por Siegel e Siegel (1990) e Kolb (2000), assenta num amplo conjunto de hipóteses simplificadoras, a saber: (i) os mercados são perfeitos (não existem custos de transacção, todos os activos financeiros são infinitamente divisíveis, não existe diferencial *bid-ask*, etc.); (ii) não existem restrições às vendas a descoberto; (iii) são ignoradas as diferenças entre os preços dos contratos de futuros e os preços dos contratos a prazo; (iv) o custo de financiamento, à taxa de juro sem risco, é o único custo relevante; (v) o depósito inicial de garantia é efectuado mediante a entrega de títulos.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{F} = & -D_{s,t}(1)[\Delta A_0] - D_{s,t}(2) \left[\Delta A_1 - \frac{(\Delta A_0)^2}{2} \right] - \\ & D_{s,t}(3) \left[\Delta A_2 - (\Delta A_0)(\Delta A_1) + \frac{(\Delta A_0)^3}{3!} \right] - \dots - D_{s,t}(m) \left[\Delta A_{m-1} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{(\Delta A_0)^m}{m!} \right] \end{aligned} \quad (7.12)$$

onde F e F' denotam, respectivamente, o preço (em notação simplificada) do futuro antes e após o choque de taxas de juro, e $\Delta F = F' - F$. O elemento de ordem m do vector de duração para o contrato de futuros, $D_{s,t}(m)$, é agora definido por:

$$D_{s,t}(m) = (s+t)^m - s^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.13)$$

Este resultado confirma as conclusões adiantadas nos capítulos precedentes a propósito da duração de uma obrigação de cupão zero.

7.2.4.2. Contratos de Futuros sobre Obrigações Clássicas

Considere-se agora um contrato de futuros sobre uma obrigação clássica com maturidade em T . O vencimento do futuro ocorre no momento s . O seu preço, F_B , pode ser decomposto numa soma de contratos de futuros sobre obrigações de cupão zero, cada um deles com um vencimento associado ao momento em que a obrigação efectua pagamentos. Em termos formais:

$$F_B = \sum_{t=1}^T c_t \cdot F(s, t) \quad (7.14)$$

Repetindo os procedimentos adoptados para derivar (7.12), prova-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F_B}{F_B} = & -D_{FB}(1)[\Delta A_0] - D_{FB}(2) \left[\Delta A_1 - \frac{(\Delta A_0)^2}{2} \right] - \\ & D_{FB}(3) \left[\Delta A_2 - (\Delta A_0)(\Delta A_1) + \frac{(\Delta A_0)^3}{3!} \right] - \dots - D_{FB}(m) \left[\Delta A_{m-1} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{(\Delta A_0)^m}{m!} \right] \end{aligned} \quad (7.15)$$

onde F_B e F'_B representam, respectivamente, o preço antes e após o choque de taxas de juro, e $\Delta F_B = F'_B - F_B$. O elemento de ordem m do vector de duração para o contrato de futuros, $D_{FB}(m)$, é agora definido por:

$$D_{FB}(m) = \sum_{t=1}^T w_t \times D_{s,t}(m) \quad , \quad w_t = \frac{c_t \cdot F(s,t)}{F_B} \quad (7.16)$$

7.2.5. Principais Limitações do Modelo

O modelo do vector de duração permite, sem violar as condições de equilíbrio, uma redução muito significativa no risco de processo estocástico associado à estratégia de imunização, mas apresenta alguns constrangimentos em termos de implementação prática. Prisman e Shores (1988) provam que, nos casos em que as posições negativas são negadas, é impossível construir uma carteira de obrigações que satisfaça, simultaneamente, as duas primeiras condições de imunização em (7.6). Nestes casos, o modelo do vector de duração reduz-se ao modelo de duração de Fisher-Weil.¹⁸³

Uma segunda limitação do modelo refere-se à forma funcional assumida para função geradora de retorno das obrigações. De facto, ao elegerem a representação polinomial na derivação do modelo, Chambers *et al.* descartam a possibilidade de outras formas funcionais (exponencial, logarítmica, etc.) proporcionarem uma aproximação mais

(183) Como sublinham Prisman e Shores (1988), nos casos em que as posições negativas são eliminadas a única estratégia que permite satisfazer as restrições do problema de imunização é aquela que envolve a aquisição de uma obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTL. Estes autores derivam ainda um vector de duração similar ao de Chambers *et al.* (1988), mas reformulam a sua aplicação propondo estratégias de minimização do risco que não admitem posições negativas na carteira. A abordagem de Prisman e Shores revela, contudo, uma debilidade essencial, uma vez que apesar de reduzir o risco de processo estocástico não o elimina totalmente.

adequada para a verdadeira função de retorno.¹⁸⁴ Acresce que a função polinomial acusa um comportamento assintótico bastante pernicioso, muito pouco consistente com a forma geral das funções de retorno das obrigações. Por último, o elevado número de condições de imunização a respeitar em cada momento pode tornar a implementação do modelo demasiado dispendiosa.

7.3. Modelos de Duração Direccional e de Duração Parcial

Na procura de uma solução mais adequada para a decomposição do risco de taxa de juro associado a choques não paralelos sobre a EPTJ, Reitano (1989;1990;1991) explana, num contexto multivariado, três novas abordagens aos modelos de duração. Os modelos apresentam a vantagem de não depender de quaisquer pressupostos de equilíbrio relativamente ao comportamento dos choques de taxa de juro, e de ser compatíveis com activos que geram cash flows incertos.

O *modelo de duração direccional* está alicerçado na especificação dos choques de taxa de juro em termos de um vector fixo e arbitrário \vec{N} , ou seja, admite que o vector inicial de taxas de juro, i_0 , se desloca Δi unidades na direcção de \vec{N} . Em alternativa, o *modelo de duração parcial* reconhece, de forma explícita, a natureza multivariada dos choques de taxa de juro, e aproxima as variações na função de preço de uma obrigação através das suas derivadas parciais. A terceira formulação preconiza a conversão dos choques não paralelos sobre a EPTJ em *choques paralelos equivalentes*, e a condução da análise em função desta representação dinâmica alternativa.

(¹⁸⁴) Nelson e Siegel (1987), Bliss (1989) e Svensson (1994;1995) obtiveram resultados bastante satisfatórios na modelização da EPTJ utilizando funções exponenciais. Para mais detalhes veja-se o ponto 7.6.

As três formulações apresentadas têm como denominador comum o facto de se cimentarem numa *representação discreta* da EPTJ, ou seja, consideram que a curva pode ser enunciada por um vector de m taxas pivô, correspondentes às maturidades de referência para mercado.¹⁸⁵ A continuidade da EPTJ nos demais prazos é assegurada por interpolação (linear, exponencial, etc.). Analisamos, em seguida, as suas diferenças.

7.3.1. Modelo de Duração Direcional

Representemos por $i_0 = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ o vector inicial de taxas de referência, com base no qual o valor da obrigação (ou carteira) é determinado. Designemos também por $\vec{N} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$, $\vec{N} \neq 0$, o vector de direcção para os choques de taxa de juro, cujo comprimento é dado por $|\vec{N}| = (\sum_{j=1}^m n_j^2)^{1/2}$.¹⁸⁶ O modelo de duração direcional especifica os choques de taxa de juro em termos de uma magnitude, Δi , e de um vector pré-determinado de direcção \vec{N} . Em termos formais,

$$i_0 \rightarrow (i_0 + \Delta i \vec{N}) = (i_1 + \Delta i n_1, i_2 + \Delta i n_2, \dots, i_m + \Delta i n_m) \quad (7.17)$$

Nos casos em que $\vec{N} = (1, 1, \dots, 1)$, um vector de choques paralelos, o modelo de duração direcional reduz-se ao tradicional modelo de duração aditiva de Fisher e Weil.¹⁸⁷

(¹⁸⁵) As taxas de referência, designadas por Reitano de *yield curve drivers*, correspondem, normalmente, a taxas observadas no mercado para obrigações de cupão zero, obrigações clássicas e outros títulos com bastante liquidez. A título de exemplo, Reitano propõe que o vector seja constituído pelas taxas respeitantes aos prazos de 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 20, e 30 anos.

(¹⁸⁶) Em termos intuitivos, o vector \vec{N} indica a “direcção” do choque de taxa de juro, na medida em que espelha a magnitude relativa dos choques individuais ao longo da EPTJ.

(¹⁸⁷) Os modelos de duração imunizante analisados no capítulo 4 são, na sua generalidade, casos particulares do modelo de duração direcional, uma vez que todos eles pressupõem, à partida, a especificação da direcção em que ocorre o choque de taxa de juro. Mais, as próprias *Key-Rate Durations*, propostas por Ho (1990;1992), constituem o exemplo mais difundido das medidas de duração direcional. Para mais detalhes sobre o modelo de Ho, veja-se o ponto 7.4.

Designemos por $B(i_0)$ e $B(i_0 + \Delta i \vec{N})$ o valor da obrigação antes e após o choque de taxas de juro, respectivamente. Nestas condições, demonstra-se que o retorno do investimento pode ser aproximado pela seguinte expansão de Taylor de 1ª e 2ª ordem:

$$\frac{B(i_0 + \Delta i \vec{N})}{B(i_0)} \cong 1 - D_N(i_0) \Delta i + \frac{1}{2} C_N(i_0) (\Delta i)^2 \quad (7.18)$$

onde

$$D_N(i) = - \frac{1}{B(\vec{i})} \frac{dB(\vec{i})}{d\vec{N}} \quad (7.19)$$

e

$$C_N(i) = \frac{1}{B(\vec{i})} \frac{d^2 B(\vec{i})}{d\vec{N}^2} \quad (7.20)$$

denotam, respectivamente, os conceitos de *duração direccional*, $D_N(i)$, e *convexidade direccional*, $C_N(i)$ na direcção de \vec{N} , e $B(\vec{i}) \neq 0$. As 1ª e 2ª derivadas direccionais em (7.19) e (7.20) são calculadas, nesta ordem, segundo:

$$\left. \frac{dB(\vec{i})}{d\vec{N}} \right|_{\Delta i=0} = \sum_{j=1}^m n_j B_j(\vec{i}_0) \quad (7.21)$$

e

$$\left. \frac{d^2 B(\vec{i})}{d\vec{N}^2} \right|_{\Delta i=0} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m n_j n_k B_{jk}(\vec{i}_0) \quad (7.22)$$

com $B_j(\vec{i})$ a simbolizar a derivada parcial de $B(\vec{i})$ com respeito à taxa de juro relativa à maturidade j , e com $B_{jk}(\vec{i})$ a denotar a derivada cruzada de 2ª ordem, ambas avaliadas para $\Delta i = 0$. Para o cálculo de $D_N(i)$ e $C_N(i)$ apresentam-se, pelo menos, três alternativas. A primeira técnica, aplicável apenas nos casos em que $B(\vec{i})$ é dado por uma fórmula matemática explícita, é baseada no cálculo das *derivadas parciais*, tal como estas foram definidas em (7.21) e (7.22). A segunda, adequada quer na avaliação de cash

flows fixos, quer nos casos em que os cash flows são sensíveis às taxas de juro, envolve a obtenção de estimativas directas para $D_N(i)$ e $C_N(i)$ usando o *método das diferenças finitas*. Exemplo disso são as seguintes expressões:¹⁸⁸

$$D_N(i) \cong -\frac{B(i_0 + \Delta i \vec{N}) - B(i_0 - \Delta i \vec{N})}{2B(i_0)\Delta i} \quad (7.23)$$

$$C_N(i) \cong \frac{B(i_0 + \Delta i \vec{N}) - 2B(i_0) + B(i_0 - \Delta i \vec{N})}{B(i_0)(\Delta i)^2} \quad (7.24)$$

onde Δi representa um choque de dimensão reduzida (5 a 10 pontos base) sobre a EPTJ. O terceiro método compreende o uso das *durações parciais*, e será explicitado no ponto seguinte. A equação (7.18) traduz o chamado *modelo de duração (e convexidade) direccional*. Através dela é possível verificar que, redefinindo os conceitos de duração e convexidade, o modelo clássico incorpora sem problemas choques do tipo não paralelo, e fornece um enquadramento geral para a medição do risco de taxa de juro.¹⁸⁹

7.3.2. Modelo de Duração Parcial

O *modelo de duração parcial* providencia uma representação alternativa para o risco de taxa de juro reconhecendo, de forma explícita, a natureza multivariada dos choques sobre a EPTJ. Designando por $\Delta i = (\Delta i_1, \Delta i_2, \dots, \Delta i_m)$ o vector de choques, o processo estocástico pressuposto pelo modelo é definido por:

$$i_0 \rightarrow (i_0 + \Delta i) = (i_1 + \Delta i_1, i_2 + \Delta i_2, \dots, i_m + \Delta i_m) \quad (7.25)$$

(¹⁸⁸) A fórmula em (7.23) reflecte uma aproximação à diferença simétrica central de uma derivada.

(¹⁸⁹) Apesar de existirem múltiplas formas de especificar o vector de direcção \vec{N} , a representação do retorno de uma obrigação expressa em (7.18) é consistente. É, no entanto, possível tornar a sua definição única, bastando para tal que se proceda a uma normalização do modelo impondo a restrição $|\vec{N}|=1$, com $\|\cdot\|$ a denotar o comprimento do vector. Nestas condições, a variável de magnitude, Δi , define, de *per si*, o comprimento do vector de choques de taxa de juro $\Delta i \cdot \vec{N}$.

Ao contrário daquilo que vimos no modelo de duração direccional, neste caso não são enumeradas quaisquer relações entre os vários Δi_j . Representemos por $B(i_0)$ e $B(i_0 + \Delta i)$ o valor da obrigação antes e após o choque de taxas de juro, respectivamente. Demonstra-se, apelando a uma versão multivariada da expansão de Taylor, que o retorno do investimento é, neste caso, aproximado por:

$$\frac{B(i_0 + \Delta i)}{B(i_0)} \cong 1 - D(\vec{i}) \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \Delta i^T C(\vec{i}) \Delta i \quad (7.26)$$

onde

$$D_j(i) = -\frac{1}{B(\vec{i})} \frac{dB(\vec{i})}{di_j}, \quad j = 1, \dots, m \quad (7.27)$$

e

$$C_{jk}(i) = \frac{1}{B(\vec{i})} \frac{d^2 B(\vec{i})}{di_j di_k}, \quad j, k = 1, \dots, m \quad (7.28)$$

denotam, respectivamente, os conceitos de *duração parcial*, $D_j(i)$, e *convexidade parcial*, $C_{jk}(i)$, com base nos quais é possível construir um *vector de duração total*, $D(\vec{i})$, e uma *matriz de convexidade total*, $C(\vec{i})$, representados, por esta ordem, por:

$$D(\vec{i}) = [D_1(i), \dots, D_m(i)] \quad (7.29)$$

e por

$$C(\vec{i}) = \begin{pmatrix} C_{11}(i) & \dots & C_{1m}(i) \\ \dots & & \dots \\ C_{m1}(i) & \dots & C_{mm}(i) \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

A equação (7.26) define o *modelo de duração (e convexidade) parcial*. Enquanto que a abordagem tradicional modeliza o retorno de uma obrigação em função de uma única variável (choque paralelo sobre a EPTJ), este modelo reflecte a sensibilidade ponto por ponto ao longo de toda a EPTJ.

7.3.3. Propriedades dos Modelos

A natureza multivariada dos modelos de duração direccional e de duração parcial permite ainda obter um conjunto de propriedades interessantes. A primeira é a de que, nos casos em que os choques são do tipo paralelo [$\vec{N} = (1,1,...,1)$ ou $\Delta i_j = \Delta i_k$], as tradicionais medidas de duração (aditiva) e convexidade são obtidas por agregação das respectivas medidas de duração e convexidade parcial, isto é:

$$D(i_0) = \sum_{j=1}^m D_j(i_0) \quad , \quad j = 1, \dots, m \quad (7.31)$$

$$C(i_0) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m C_{jk}(i_0) \quad , \quad j, k = 1, \dots, m \quad (7.32)$$

Dito de outro modo, as medidas de duração e convexidade parcial representam parcelas das convencionais medidas de duração e convexidade. Em segundo lugar, as medidas de duração e convexidade direccional definidas em (7.19) e (7.20) podem ser facilmente calculadas a partir das respectivas medidas de duração e convexidade parcial, i.e.,

$$D_N(i) = \vec{N} \cdot D(\vec{i}) = \sum_{j=1}^m n_j D_j(i_0) \quad , \quad j = 1, \dots, m \quad (7.33)$$

$$C_N(i) = \vec{N}^T \cdot C(\vec{i}) \cdot \vec{N} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m n_j n_k C_{jk}(i_0) \quad , \quad j, k = 1, \dots, m \quad (7.34)$$

donde se conclui que, contrariamente ao que dissemos no capítulo 4 a propósito das medidas (unidireccionais) de duração imunizante, este modelo permite determinar a sensibilidade da carteira com respeito a qualquer choque de taxas de juro, bastando para tal que se combinem as respectivas medidas de duração parcial.

O cálculo da duração direccional a partir das durações parciais apresenta ainda o atractivo de facultar a construção de intervalos de confiança para as medidas de risco de

taxa de juro. Com efeito, e em resultado da aplicação da desigualdade de *Cauchy-Schwartz*¹⁹⁰, Reitano (1989;1991) demonstra que os limites superior e inferior para $D_N(i_0)$ são dados por:

$$-|D_N(i_0)|\|\vec{N}\| \leq D_N(i_0) \leq |D_N(i_0)|\|\vec{N}\| \quad (7.35)$$

onde $||$ denota o comprimento do vector. De forma equivalente, o intervalo de variação para a convexidade direcciona é representado por:

$$\lambda_1 \|\vec{N}\|^2 \leq C_N(i_0) \leq \lambda_m \|\vec{N}\|^2 \quad (7.36)$$

onde λ_1 e λ_m denotam, respectivamente, o menor e o maior valor próprio de $C(i_0)$.¹⁹¹

7.3.4. Representação dos Choques de Taxa de Juro por um Equivalente Paralelo

Em alternativa ao desenvolvimento de medidas de duração que reflectem, de forma directa, o efeito de choques não paralelos sobre a EPTJ, Reitano (1989;1991) propõe uma metodologia simples que assenta na transformação dos choques não paralelos em choques paralelos equivalentes. Utilizando uma aproximação de 1ª ordem¹⁹² e a matriz de durações parciais, demonstra-se que o *choque paralelo equivalente*, Δi^E , é definido por:

(¹⁹⁰) Dado que pela equação (7.33) $D_N(i_0)$ é calculado através de um produto interno de dois vectores, a desigualdade de Cauchy-Schwartz diz-nos que o valor absoluto de um produto interno é menor ou igual ao produto dos comprimentos dos vectores, sendo que apenas é igual nos casos em que os vectores são paralelos.

(¹⁹¹) Este intervalo remete-nos novamente para a discussão sobre o carácter desejável da convexidade iniciada no capítulo 5. Efectivamente, com base em (7.36) é possível constatar que a convexidade apenas é positiva se todos os valores próprios de $C(i_0)$ forem positivos, i.e., se a matriz for definida positiva.

(¹⁹²) Demonstra-se que o *choque paralelo equivalente* definido por uma aproximação de 2ª ordem é igual a:

$$\Delta i^E \equiv \frac{1}{C'} \left\{ D_{fw} - \left[D_{fw}^2 - 2C'D \cdot \Delta i + C' \Delta i^T C \Delta i \right]^{1/2} \right\}$$

onde $C' = C'(i_0)$ representa a convexidade calculada com base na EPTJ inicial, $D = D(\vec{i})$ denota o vector de duração total, e $C = C(\vec{i})$ simboliza a matriz de convexidade total.

$$\Delta i^E \cong \frac{D(\vec{i}) \cdot \Delta i}{D_{fw}(i_0)} \cong \frac{1}{D_{fw}(i_0)} \left[\sum_{j=1}^m D_j(i_0) \Delta i_j \right] \quad (7.37)$$

onde $D_{fw}(i_0)$ representa a habitual duração de Fisher e Weil para choques do tipo aditivo. Isto é, o choque paralelo equivalente não é mais do que uma média ponderada dos deslocamentos individuais Δi_j ocorridos na EPTJ.¹⁹³ A descrição dos choques sobre a EPTJ através de um equivalente paralelo fornece um método simples para estimar a volatilidade do preço de uma obrigação. De facto, se substituirmos (7.37) em (7.26) e desprezarmos o termo de 2ª ordem ficamos, após alguma manipulação, com:

$$\frac{B(i_0 + \Delta i)}{B(i_0)} \cong 1 - D_{fw} \cdot \Delta i^E \quad (7.38)$$

Convém sublinhar que, no caso de todas as durações parciais serem positivas, a estimativa do retorno obtida mediante (7.38) é consistente com o valor obtido usando a definição de duração modificada. Nos casos em que tal não acontece a estimativa fornecida por (7.38) é claramente deficiente, e implica a necessidade de estabelecer uma conexão entre a dimensão dos choques paralelos equivalentes e o comprimento dos choques individuais (não paralelos) de taxa de juro. Tendo em mente este objectivo, Reitano (1989;1991) introduz na literatura os conceitos de *alavanca direccional* [$L(\Delta i)$] e de *alavanca duracional* [$L(i_0)$] definidos, respectivamente, por:

$$L(\Delta i) = \frac{\Delta i^E}{|\Delta i|} \quad (7.39)$$

e por
$$L(i_0) = \max L(\Delta i) = \frac{|D(\vec{i})|}{|D_{fw}(i_0)|} \quad (7.40)$$

(193) Para o comprovar basta recordar que $D_{fw}(i_0) = \sum_{j=1}^m D_j(i_0)$. Prova-se ainda, que nos casos em que todas as durações parciais têm o mesmo sinal, Δi^E está situado entre as variações mínima e máxima das taxas que compõem a EPTJ, ou seja, $\min(\Delta i_j) \leq \Delta i^E \leq \max(\Delta i_j)$.

Em termos intuitivos, a equação (7.40) diz-nos que o vector de duração total $D(\vec{i})$ determina a direcção em que $L(\Delta i)$ é maximizado.¹⁹⁴ Mais, o seu comprimento, em unidades de $D_{fw}(i_0)$, quantifica a relação entre Δi^E e $|\Delta i|$. Em suma, quanto maior for $L(i_0)$ tanto maior será o efeito potencial (máximo) de pequenos choques não paralelos sobre o preço de uma obrigação. Para obtermos estimativas do retorno da obrigação basta substituir a equação (7.39) em (7.38):

$$\frac{B(i_0 + \Delta i)}{B(i_0)} \cong 1 - L(\Delta i) D_{fw} \times |\Delta i| \quad (7.41)$$

onde $L(\Delta i) D_{fw}$ traduz uma *medida efectiva de duração*, medida em unidades de $|\Delta i|$.¹⁹⁵ Apesar do seu carácter apelativo, o conceito de alavanca direcciona padece de uma limitação importante uma vez que relaciona choques de taxa de juro que são medidos em unidades distintas. Com efeito, enquanto que Δi é medido em termos do comprimento de um vector, $|\Delta i|$, Δi^E é mensurável em termos de um deslocamento paralelo,¹⁹⁶ um pequeno pormenor que pode camuflar potenciais riscos de taxa de juro.

Para ultrapassar este problema, Reitano (1989;1991) introduz os conceitos de *multiplicador direcciona* [$M(\Delta i)$] e de *multiplicador duracional* [$M(i_0)$], dois indicadores da relação entre o impacto produzido por um choque de taxas de juro Δi , e o impacto originado por um choque paralelo do mesmo comprimento e “orientação”:

(194) Por outras palavras, o vector delimita o potencial de risco de taxa de juro implícito num determinado choque de taxa de juro. Em termos formais,

$$-\frac{|D(\vec{i})|}{|D_{fw}(i_0)|} \leq L(\Delta i) \leq \frac{|D(\vec{i})|}{|D_{fw}(i_0)|}$$

(195) De forma análoga, a medida $L(i_0) D_{fw}$ quantifica o valor máximo da duração efectiva, mensurável em unidades de $|\Delta i|$.

(196) Mais especificamente, se designarmos por $\vec{\Delta i}^E = (\Delta i^E, \dots, \Delta i^E)$ o vector de choques paralelos correspondente a Δi^E , prova-se que a seguinte relação é verdadeira: $|\vec{\Delta i}^E| = \sqrt{m} \times \Delta i^E$.

$$M(\Delta i) = \frac{|\bar{\Delta i}^E|}{|\Delta i|} = \frac{\sqrt{m} |D(i) \cdot \Delta i|}{|D_{fw}(i_0)| |\Delta i|} \quad (7.42)$$

$$M(i_0) = \max M(\Delta i) \quad (7.43)$$

Nestas condições, o efeito de um choque paralelo com o mesmo comprimento e orientação $[\Delta i^{lo}]^{197}$ sobre o preço de uma obrigação é estimado segundo:

$$\frac{B(i_0 + \Delta i)}{B(i_0)} \cong 1 - M(\Delta i) D_{fw} \times \Delta i^{lo} \quad (7.44)$$

onde
$$\Delta i^{lo} = \text{sign}(\Delta i^E) \times |\Delta i| / \sqrt{m}$$

O valor de $M(\Delta i) D_{fw}$ traduz uma *medida de duração efectiva*, mensurável em unidades do choque paralelo, e fornece uma generalização do tradicional conceito de duração modificada de Macaulay.¹⁹⁸ De facto, para choques paralelos $M(\Delta i) = 1$ e (7.44) replica a estimativa dada por (4.5).¹⁹⁹

7.3.5. Estratégia de Imunização Direccional e Não Direccional

As propriedades de imunização dos modelos de duração direccional e de duração parcial são examinadas por Reitano (1990a;1991b). O autor explana as condições sob as quais uma carteira de obrigações pode considerar-se, local ou globalmente, protegida contra um choque de taxas de juro “na direcção de \tilde{N} ”, ou em qualquer direcção.²⁰⁰

(197) Por orientação referimo-nos ao sinal (positivo ou negativo) do choque paralelo equivalente.

(198) Como seria de prever, existe uma relação estreita entre os conceitos de alavanca direccional (duracional) e multiplicador direccional (duracional). De facto, prova-se que $M(\Delta i) = \sqrt{m} |L(\Delta i)|$, e que $M(i_0) = \sqrt{m} L(i_0)$.

(199) Refira-se ainda que, como (por definição) o valor de $M(\Delta i)$ é sempre positivo, a medida $M(\Delta i) D_{fw}$ assume também ela sempre o mesmo sinal de D_{fw} , reflectindo assim apenas o efeito multiplicador devido aos choques não paralelos (subentenda-se choques não paralelos com o mesmo comprimento e orientação que Δi).

(200) As potencialidades resultantes da aplicação destes modelos na gestão de activos e passivos são analisadas, com exemplos, em Reitano (1990; 1991a;1991b;1992;1993).

Se considerarmos um HTI único ($H \geq 0$, $H < T$), a *imunização local* de uma carteira numa determinada direcção implica, na sequência dos princípios enunciados para a imunização contra choques paralelos, a satisfação das seguintes condições:²⁰¹

$$\begin{cases} D_N(B_P) = D_N(Z_H) \\ C_N(B_P) > C_N(Z_H) \end{cases} \quad (7.45)$$

Ou seja, a carteira B_P deve exibir a mesma duração direccional que uma obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTI, Z_H , mas maior convexidade direccional.

Para uma *imunização global* “na direcção de \vec{N} ”, à restrição de duração expressa em (7.45) é imprescindível acrescentar, para todos os vectores de taxa de juro admissíveis $\vec{i} = i_0 + \Delta i \vec{N}$, a seguinte restrição de convexidade:²⁰²

$$C_N(B_P) > C_N(Z_H) + 2D_N(Z_H)[D_N(B_P) - D_N(Z_H)] \quad (7.46)$$

Conforme salienta Reitano (1992, pp. 38), a estratégia de imunização direccional tem uma limitação importante: deixa a carteira vulnerável, não apenas a choques de taxa de juro noutras direcções, mas também a deslocamentos significativos nessa direcção. A juntar a este pormenor, o elevado número de restrições (de duração e convexidade) que é necessário satisfazer para implementar a estratégia torna-a objectivamente impraticável.²⁰³ O problema base da estratégia residia então na identificação dos choques de taxa de juro (das direcções) mais prováveis num contexto real. As duas

(201) As condições de imunização não direccional são meras generalizações dos resultados derivados para a imunização direccional. Para mais detalhes veja-se Reitano (1990;1991a).

(202) Para choques paralelos, a restrição de convexidade direccional em (7.46) pode ser escrita utilizando os conceitos de M-Quadrado ou *inércia*. Para mais detalhes veja-se, por exemplo, Bierwag (1987).

(203) No contexto da imunização do balanço, e considerando cash flows (activos e passivos) fixos, as restrições impostas pela estratégia de imunização não direccional são equivalentes às restrições colocadas por uma estratégia de *cash flow matching*, assumindo que são usadas todas as taxas de referência para representar a EPIJ. Para mais detalhes veja-se o capítulo 10 e Reitano (1993a).

soluções avançadas neste contexto têm em comum o facto de se apoiarem no uso dos dados históricos sobre os choques de taxa de juro e respectiva matriz de covariâncias. A primeira sugestão consubstancia-se na realização de uma *análise de componentes principais*, e será analisada em detalhe no ponto 7.7. A segunda, sugerida por Reitano (1993a;1996), configura uma *estratégia de imunização estocástica* assente na minimização de uma nova medida do risco de taxa de juro, $RM(w)$. Esta medida é definida pela soma ponderada de duas outras medidas de risco: a variância do retorno da carteira, $Var[R(\Delta i)]$, e uma medida do risco de perda, $|D(i_0)|^2$:

$$RM(w) = wVar[R(\Delta i)] + (1-w)|D(i_0)|^2 = DK_w D^T, \quad 0 \leq w \leq 1 \quad (7.47)$$

onde $D = D(i_0)$ denota o vector de durações parciais, e K_w incorpora a matriz de covariâncias para os movimentos das taxas de juro.²⁰⁴ A estratégia de imunização resultante não dispensa, todavia, as habituais restrições de duração direcciona e de retorno desejado para o investimento. O problema típico do investidor é dado por:²⁰⁵

$$Min (D \cdot K_w \cdot D^T) \quad \text{s.a.} \quad D(\vec{i}) \cdot \vec{N} = D \quad \text{e} \quad D(\vec{i}) \cdot \vec{E} = r \quad (7.48)$$

7.4. Modelo de “Key-Rate Durations” e “Key-Rate Convexities”

Como vimos no ponto anterior, os conceitos de duração (e convexidade) direcciona (e parcial) permitem isolar a variação no valor da carteira que decorre de um choque de taxa de juro que afecta, de forma aleatória, uma única maturidade deixando as demais inalteradas.

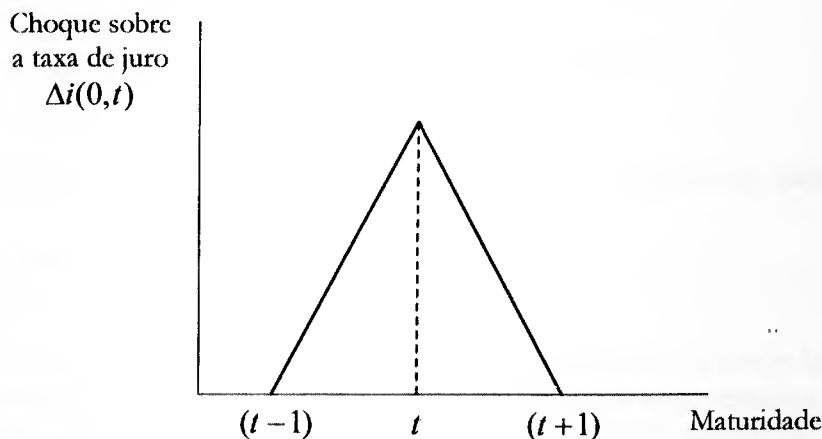
(204) Em termos mais rigorosos, K_w é dado por $K_w = wK + (1-w)I$, ou seja, por uma soma ponderada entre a matriz de covariâncias, K , e a matriz identidade, I .

(205) Na mesma linha de investigação, Falkenstein e Hanweck (1996;1997) apresentam um método que permite determinar a combinação de activos de cobertura que minimiza a variância da carteira.

As potencialidades tremendas desta metodologia chocam, todavia, com uma realidade paradoxal: existem múltiplas formas de definir a duração direccional. De facto, o método é consistente com diferentes modalidades para as taxas de referência (taxas *spot*, *forward*, *par yields*, etc.), com definições alternativas para o vector de direcção e para a dimensão da perturbação sobre a EPTJ, e com múltiplos naipes de taxas de referência.

A mais popular das durações direccionais foi proposta por Ho (1990;1992), e tomou a designação de *Key-Rate Duration*, *KRD*.²⁰⁶ A medida baseia-se, desde logo, numa representação discreta da EPTJ para as taxas *spot*.²⁰⁷ A principal inovação do modelo situa-se, porventura, ao nível da configuração dos choques de taxa de juro. De facto, a medida de duração é obtida a partir de um conjunto de vectores de *direcção piramidal*, \bar{N}_j . Em termos gráficos, o choque é representado por:

Figura 7.1: Interpolação Linear de um Choque de Taxa de Juro



⁽²⁰⁶⁾ Outros exemplos incluem as denominadas *reshaping durations*, introduzidas por Klaffky *et al.* (1992). Estes autores propõem duas novas medidas de duração, que procuram reflectir a sensibilidade da carteira a alterações nos extremos da EPTJ. Em termos mais concretos, sugere-se a quantificação do risco de taxa de juro através de uma *short-end duration* (SEDUR), uma medida da sensibilidade da carteira a modificações no segmento “curto” da EPTJ (representadas por alterações no *spread* entre as taxas respeitantes aos prazos de 2 e 10 anos), e através de uma *long-end duration* (LEDUR), uma medida da resposta da carteira a alterações no segmento “longo” da EPTJ (representadas por alterações no *spread* entre as taxas respeitantes aos prazos de 10 e 30 anos).

⁽²⁰⁷⁾ A título de curiosidade, Ho (1992) considera um conjunto fixo de 11 prazos de referência, a saber, 0.25, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 20, 25, e 30 anos.

o que pressupõe a seguinte definição para os vectores de direcção:²⁰⁸

$$\vec{N}_j = (0, \dots, 0, 1/2, 1, 2/3, 1/3, 0, 0, \dots) \quad (7.49)$$

A taxa de juro *spot* correspondente ao valor 1 em \vec{N}_j é designada por *key-rate*. A KRD_j é então definida como o negativo da variação percentual no valor de uma obrigação (incluindo o juro corrido), em resultado de um choque de taxa de juro com magnitude de 10 pontos base na direcção de \vec{N}_j .²⁰⁹ De forma equivalente, o conceito de *Key-Rate Convexity* [*KRC*] sugerido, por exemplo, em Ho *et al.* (1996), transpõe para o contexto dos vectores de direcção definidos por (7.49) o conceito de convexidade direccional.

Posto isto, como cada choque infinitesimal sobre uma *key-rate* contribui para a variação (proporcional) no preço da obrigação, e como a continuidade dos choques ao longo de todo o espectro de prazos da EPTJ é assegurada por interpolação linear, se somarmos todos os deslocamentos individuais podemos escrever:

$$\frac{\Delta B(\vec{i})}{B(\vec{i})} \cong - \sum_{j=1}^{11} KRD_j \times \Delta i_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{11} \sum_{k=1}^{11} KRC_{jk} \times \Delta i_j \Delta i_k \quad (7.50)$$

Ou seja, o efeito total sobre o preço é dado pela soma dos efeitos induzidos pelos deslocamentos individuais de cada *key-rate*.²¹⁰

(²⁰⁸) Em termos mais específicos, a taxa *spot* de referência é perturbada 10 pontos base (o pico da pirâmide), e o choque é interpolado linearmente entre as duas maturidades de referência adjacentes (os dois vértices de base). Refira-se neste ponto que Phoa e Shearer (1997) adoptam uma metodologia alternativa no cálculo das *key rate durations*, fazendo uso de uma representação dos choques em termos de deslocamentos na *forward rate curve*.

(²⁰⁹) Tratando-se de uma duração direccional, o seu cálculo pode ser efectuado por qualquer um dos métodos referidos em 7.3.

(²¹⁰) Este resultado permite obter um corolário interessante, devidamente assinalado por Ho (1992) e Reitano (1989). Notando que os vectores de direcção \vec{N} definidos em (7.49) não constituem senão partições do vector de choques paralelos $\vec{N} = (1, 1, \dots, 1)$, conclui-se que as *KRD's* constituem, de facto, uma decomposição linear da tradicional duração aditiva. Em termos formais:

$$\sum_{j=1}^{11} D_N(i_0) = \sum_{j=1}^{11} \vec{N}_j \cdot D(\vec{i}) = (1, \dots, 1) \cdot D(\vec{i}) = D_{fw}$$

A versatilidade do conceito de *KRD* torna-o compatível com esquemas alternativos.²¹¹ Por exemplo, o conceito pode ser combinado, quer com a análise histórica dos movimentos de taxa de juro proporcionada pelo método dos componentes principais²¹², quer com modelos de equilíbrio (e de não arbitragem) para a EPTJ, para representar o perfil de risco de taxa de juro da maioria dos activos financeiros.

A popularidade do conceito não invalida, todavia, que lhe seja assacada alguma fragilidade. A primeira, avançada por Willner (1996), questiona o facto da análise tratar os deslocamentos em diferentes pontos da EPTJ de forma independente, ignorando assim as correlações entre os choques de taxa de juro para os diferentes prazos. A segunda crítica, devida a Phoa (2001), alude ao facto do cálculo das *KRD* (e *KRC*) se basear, não nas TRA observáveis no mercado, mas numa perturbação da EPTJ teórica sendo, por este motivo, sensível ao método utilizado para estimar a curva de taxas (*splines*, etc.).

Em terceiro lugar, critica-se o facto da configuração piramidal para os choques de taxa de juro não ter subjacente um estudo rigoroso sobre o padrão de deslocamentos da EPTJ, carecendo, neste sentido, de significado económico.²¹³ Por último, equacionam-se as dificuldades (e os inevitáveis custos em termos de eficiência e retorno) sentidas na implementação de estratégias de cobertura/imunização com base neste modelo, fruto do elevado número de restrições (*KRD's*) impostas.

(211) Para uma ilustração da aplicação do conceito de *KRD* no cálculo da estatística VAR veja-se, por exemplo, Golub e Tilman (1997), Ho *et al.* (1996), e Bühler e Zimmermann (1996).

(212) Veja-se, por exemplo, Bühler e Zimmermann (1996).

(213) Do ponto de vista económico é mais natural considerar o comportamento da *forward rate curve*, uma vez que este encerra as expectativas dos investidores relativamente à evolução das taxas de juro.

7.5. Modelo M-Vector

Como vimos no capítulo 5, o modelo do M-Quadrado fornece uma protecção incompleta face ao risco de processo estocástico, na medida em que despreza os ganhos de poder explicativo que advém da inclusão de termos de ordem superior na aproximação. Para ultrapassar esta deficiência e com vista, não apenas a minimizar o risco de taxa de juro, mas a eliminá-lo completamente, Nawalkha e Chambers (1997) propõem uma versão multivariada do modelo M-Quadrado obtendo um vector de medidas de risco de taxa de juro que designam, colectivamente, por *M-Vector*. Retomemos a expansão em série de Taylor para $F(t)$ (tal como este foi definido em (5.11)) em torno do HTI. Desprezando o 1º termo, que é nulo, os m termos seguintes são dados por:

$$\begin{aligned} F(t) = & -(t-H) \cdot \Delta i(H) - \frac{1}{2}(t-H)^2 \left[\frac{d(\Delta i)}{dt} - (\Delta i)^2 \right]_{t=H} - \\ & - \frac{1}{3!}(t-H)^3 \left[(\Delta i)^3 - 3(\Delta i) \frac{d(\Delta i)}{dt} + \frac{d^2(\Delta i)}{dt^2} \right]_{t=H} - \dots \\ & - \frac{1}{m!}(t-H)^m \left[(-1)^{m+1}(\Delta i)^m + \dots + \frac{d^{m-1}(\Delta i)}{dt^{m-1}} \right]_{t=H} + \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (7.51)$$

ou, de forma simplificada, por:

$$F(t) = - \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!} (t-H)^j \times X_j + \varepsilon(t) \quad (7.52)$$

onde X_j ($j=1,2,\dots,m$) denota, para cada termo em (7.51), a parcela entre parêntesis rectos. Se substituirmos (7.51) em (5.11) obtemos, após alguma manipulação algébrica:

$$\frac{\Delta B_H}{B_H} = - \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!} M^j X_j + \varepsilon_P \quad (7.53)$$

onde ε_p denota o termo residual na aproximação, e M^j simboliza o vector *M-Vector* contendo as medidas de risco de taxa de juro, cujos elementos são definidos por:

$$M^j = \frac{1}{B_0} \sum_{t=1}^T c_t \cdot W_t (t-H)^j, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (7.54)$$

A equação (7.53) define o *modelo M-Vector*. Ela diz-nos que retorno da obrigação é determinado pelo produto de um vector de medidas de risco de taxa de juro por um vector de choques sobre as taxas *forward*.²¹⁴ O vector M depende exclusivamente das obrigações que compõem a carteira e pode, por isso, ser controlado pelo investidor. O vector de choques é, por seu turno, função dos deslocamentos ocorridos na função que representa a EPTJ, pelo que se encontra fora do domínio do gestor de carteira.

A equação (7.53) estabelece ainda que a imunização completa contra o risco de taxa de juro é possível. Para tal o investidor deve escolher uma carteira de obrigações que permita a igualização do vector M a um vector de zeros. Em termos formais:²¹⁵

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{k=1}^J w_k^2 \quad (7.55) \\ \text{s.a.} \quad & M^T = \begin{bmatrix} M^1 \\ M^2 \\ \dots \\ M^m \end{bmatrix} = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \sum_{k=1}^J w_k = 1 \end{aligned}$$

(²¹⁴) O modelo M-Vector não impõe qualquer hipótese restritiva relativamente ao processo estocástico que governa as taxas de juro. A única condição exigida pelo modelo é a de que os choques sobre as taxas *forward* devem ser representados por uma função diferenciável ($m-1$ vezes) com respeito ao tempo até à maturidade dos cash flows da obrigação.

(²¹⁵) O elemento de ordem j do vector M para a carteira, M^j , é dado simplesmente por:

$$M^j = \sum_{k=1}^J w_k M_k^j$$

Em termos práticos, dois requisitos são indispensáveis à existência de uma solução para o problema de imunização. O primeiro diz respeito à necessidade impreterível de incluir posições negativas na carteira.²¹⁶ O segundo traduz a obrigatoriedade de incluir na carteira um mínimo de $m + 1$ obrigações distintas, isto é, $J \geq m + 1$. Verificadas estas condições, e independentemente da dimensão do vector M , desde que exista um número suficiente de obrigações é (teoricamente) possível imunizar o investimento.²¹⁷

O modelo *M-Vector* incorpora, como casos particulares, alguns dos mais conhecidos modelos de risco de taxa de juro.²¹⁸ Neste sentido, a sua superioridade face aos modelos unifactoriais é ditada pelos ganhos em termos de eficácia da estratégia de imunização que a adição de restrições de ordem superior (por exemplo $M^3 = 0$, $M^4 = 0$, etc.) ao problema possibilita. Num contexto mais geral, e como facilmente se constata pelas equações (7.6) e (7.55), as condições de imunização pressupostas pelos modelos *M-Vector* e do *Vector de Duração* são funcionalmente equivalentes.²¹⁹

(²¹⁶) A inclusão de posições negativas na carteira não implica necessariamente a realização de vendas a descoberto no mercado a contado. Com efeito, tal é possível, de forma *implícita*, tomando posições em contratos *forward* ou em contratos de futuros sobre obrigações, ou ainda adquirindo opções de venda sobre obrigações clássicas.

(²¹⁷) Nawalkha e Chambers (1997) salientam, contudo, que a adição de elementos ao vector, para além de um nível óptimo, não melhora significativamente a performance da estratégia de imunização. Sublinham ainda que a determinação do comprimento óptimo do vector é uma questão empírica.

(²¹⁸) Por exemplo, o modelo de duração aditiva de Fisher e Weil é equivalente ao modelo *M-Vector* incluindo apenas $M^1 = 0$ como restrição relevante. Como se verifica pela equação (7.51), igualar M^1 a zero equivale a igualar a duração da carteira ao HTI. As características da função objectivo em (7.55) fazem com que a carteira imunizante se assemelhe, neste caso, a uma carteira do tipo *ladder*. O modelo do M-Quadrado (admitindo posições negativas na carteira) é, por seu turno, equivalente ao modelo *M-Vector* considerando as seguintes restrições: $M^1 = 0$ e $M^2 = 0$. Existe, no entanto, uma diferença fundamental que deve ser realçada, e que decorre da possibilidade de incluir posições negativas na carteira. Com efeito, e ao invés daquilo que afirmámos no capítulo 5 a propósito do modelo M^2 , a satisfação da restrição $M^2 = 0$ não implica a concentração dos cash flows da carteira em torno do HTI.

(²¹⁹) O modelo *M-Vector* apresenta, contudo, uma vantagem teórica importante, dado que se funda em hipóteses menos restritivas no que toca ao processo estocástico seguido pelas taxas de juro. Efectivamente, enquanto que o modelo do vector de duração está ancorado numa representação polinomial para os choques sobre a EPTJ, o modelo *M-Vector* não impõe quaisquer restrições à forma funcional usada, desde que esta respeite a referida propriedade de diferenciabilidade.

7.6. Modelo de Imunização Paramétrica de Nelson e Siegel

Em alternativa aos modelos de imunização paramétrica alicerçados em representações polinomiais da EPTJ²²⁰, mormente em alternativa ao modelo do vector de duração de Chambers *et al.* (1988), o modelo de Nelson e Siegel (1987) consagra, não apenas um dos mais importantes métodos indirectos de estimação da EPTJ, mas também um veículo compreensivo da exposição de uma carteira ao risco de taxa de juro associado a modificações no nível, na inclinação e na curvatura da EPTJ.²²¹

À semelhança dos demais modelos paramétricos, os factores de risco são identificados pelos parâmetros da especificação funcional da EPTJ. A incerteza no modelo é fruto do desconhecimento dos parâmetros que caracterizarão a EPTJ no futuro.

7.6.1. Especificação do Modelo para a Estrutura por Prazos das Taxas de Juro

O modelo de Nelson e Siegel assenta numa especificação funcional para a taxa *forward* instantânea, partindo da resolução de uma equação diferencial de segunda ordem com raízes reais e complexas. A solução obtida pelos autores é representada por:²²²

⁽²²⁰⁾ Como é sabido, o ajustamento da EPTJ por polinómios ou por exponenciais de polinómio, preconizado por McCulloch (1971;1975) e Chambers *et al.* (1984), apresenta alguns problemas de implementação. Para além da necessidade de escolher arbitrariamente o número e a dimensão dos segmentos de maturidade a utilizar, (La Bruslerie e Gellusseau (1987)), as estimativas de taxa de juro fornecidas pelo método apresentam um comportamento assintótico bastante deficiente e instável, especialmente no segmento longo da curva (veja-se Vasicek e Fong (1982) e Shea (1984)).

⁽²²¹⁾ O modelo de Hull e White (1990), também conhecido por modelo de Vasicek generalizado, constitui uma outra opção na construção de estratégias de imunização (cobertura) cimentadas em métodos indirectos de extracção da EPTJ. Para uma ilustração desta última possibilidade ver, por exemplo, Martellini e Priaulet (2001).

⁽²²²⁾ Tal como sublinham Nelson e Siegel (1987), o comportamento da taxa de juro expresso em (7.56) representa uma simplificação do modelo descrito por $f(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/\tau_1} + \beta_2 e^{-t/\tau_2}$, para o qual o ajustamento aos dados evidenciou um problema de sobreparametrização.

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/\tau} + \beta_2 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (7.56)$$

onde t , a única variável independente, denota a maturidade da taxa de juro, e β_0 , β_1 , β_2 e τ são parâmetros a estimar.²²³ Tratando-se de uma função linear nos parâmetros (excepto em relação a τ), tal significa que os valores absolutos (e também as variações) dos parâmetros de nível, de inclinação, e de curvatura são independentes.²²⁴ A equação (7.56) implica as seguintes expressões para a taxa *spot* $i(t)$:

$$i(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(u) du = \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau}{t} (1 - e^{-t/\tau}) + \beta_2 \frac{\tau}{t} \left[1 - e^{-t/\tau} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \right] \quad (7.57)$$

e para a função de desconto, $d(t)$:

$$E \quad d(t) = e^{-i(t)t} = \exp \left\{ -\beta_0 t + \beta_1 \tau (1 - e^{-t/\tau}) + \beta_2 \tau \left[1 - e^{-t/\tau} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \right] \right\} \quad (7.58)$$

respectivamente. A equação (7.57) acomoda a maioria das configurações que a EPTJ pode tomar. Cada um dos quatro parâmetros do modelo encerra um determinado comportamento para a taxa de juro *forward* instantânea. O parâmetro β_0 , obrigatoriamente positivo, corresponde ao valor assintótico das taxas *forward* (e *spot*), isto é, ao nível para o qual convergem as taxas de juro à medida que a maturidade aumenta. Alterações neste parâmetro traduzem deslocamentos paralelos da EPTJ.

(²²³) A estimação dos parâmetros pode ser feita utilizando o *método da máxima verosimilhança*, uma *versão não linear do método dos mínimos quadrados ordinários* (OLS), ou o *método generalizado de momentos* (GMM). Em alguns trabalhos a estimação dos parâmetros é feita por recurso ao método dos mínimos quadrados ordinários linear, com a condição de que os valores de τ são obtidos por um procedimento iterativo de optimização (veja-se, por exemplo, Barrett *et al.* (1995) e Bolder e Strélski (1999)). Para mais detalhes sobre os procedimentos de estimação dos parâmetros do modelo de Nelson-Siegel-Svensson ver Deacon e Derry (1994), Ricart e Sicsic (1995), Svensson (1994;1995) e Bolder e Strélski (1999).

(²²⁴) Esta característica do modelo possibilita, por exemplo, a construção de uma aproximação exacta para a variação no preço da obrigação em termos das alterações nos parâmetros β_0 , β_1 e β_2 . Infelizmente, e como salientam, entre outros, Jones (1991) e Litterman e Scheinkman (1991), os dados empíricos indicam a existência de uma correlação histórica positiva entre as oscilações na inclinação e as variações na curvatura da EPTJ, pelo que esta característica pode revelar-se redutora.

O parâmetro β_1 determina se a inclinação da EPTJ é positiva (no caso em que $\beta_1 < 0$), ou negativa (no caso em que $\beta_1 > 0$). O valor de β_1 define ainda a velocidade de convergência das taxas de juro para o seu valor assintótico e fornece, quando somado a β_0 , o intercepto vertical da curva.²²⁵ Alterações neste parâmetro exprimem modificações na inclinação da EPTJ. O parâmetro β_2 é responsável pela curvatura da EPTJ. Nos casos em que o parâmetro β_2 é positivo (negativo), a EPTJ têm um máximo (mínimo) interior e revela, por isso, um perfil côncavo (convexo).²²⁶ Alterações neste parâmetro representam modificações na curvatura da EPTJ.

O modelo de Nelson e Siegel patentcia algumas dificuldades para ajustar correctamente o segmento curto da EPTJ, especialmente em períodos de grande volatilidade nos quais o perfil da curva exhibe dois pontos extremos locais (dois pontos de inflexão para a inclinação e concavidade).²²⁷ Para ultrapassar este problema e permitir a existência de um segundo ponto óptimo interior, Svensson (1994;1995) e Bliss (1989)²²⁸ sugerem a inclusão de parâmetros adicionais na especificação funcional de $f(t)$. A equação base do modelo de Svensson é a seguinte:

(225) Note-se que o parâmetro τ influencia o ritmo de crescimento da função $e^{-t/\tau}$. Quanto maior for o valor de τ menor será o decréscimo da função, e mais lenta será a velocidade de convergência das taxas *forward* para o seu nível de longo prazo.

(226) O parâmetro τ é também responsável pelo comportamento desta função, definindo a maior ou menor proximidade do momento em que a EPTJ apresenta um ponto máximo ou mínimo. Um valor alto (baixo) para τ implica um ponto de máximo/mínimo mais afastado (próximo) no tempo.

(227) Como assinalam Cassola e Luís (1996), o modelo de Nelson e Siegel admite a existência de um único ponto de inflexão para a concavidade, pelo que na presença de dois pontos óptimos o ajustamento proporcionado pelo modelo é fraco. Os pontos de inflexão da inclinação e da concavidade da *forward curve* são dados por $t = (1 - \beta_1/\beta_2)\tau$ e por $t = (2 - \beta_1/\beta_2)\tau$, respectivamente.

(228) A reformulação proposta por Bliss (1989) assenta na seguinte equação para as taxas de juro *spot*:

$$i(t) = \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau}{t} (1 - e^{-t/\tau}) + \beta_2 \frac{\theta}{t} \left[1 - e^{-t/\theta} \left(1 + \frac{t}{\theta} \right) \right]$$

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/\tau} + \beta_2 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} + \beta_3 \frac{t}{\theta} e^{-t/\theta} \quad (7.59)$$

onde os coeficientes β_3 e θ têm uma interpretação similar à dos coeficiente β_2 e τ , respectivamente. Segundo o autor, a flexibilidade introduzida no segmento curto da EPTJ torna a sua especificação preferível à de Nelson e Siegel.

7.6.2. Estratégia de Imunização Paramétrica

Embora inicialmente proposto com o intuito de fornecer estimativas da EPTJ, o modelo de Nelson e Siegel foi utilizado por Barrett *et al.* (1995) e Willner (1996) na formulação de estratégias de imunização contra choques sobre o nível, sobre a inclinação, e sobre a curvatura da EPTJ. Consideremos um investidor que pretende aplicar B_0 unidades monetárias numa carteira de J obrigações de taxa fixa, durante um HTI fixo H . A representação da EPTJ segundo (7.57) permite-nos escrever o preço de uma qualquer obrigação k em função de um vector de parâmetros $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau)$:

$$B_k = B_k(\vec{\beta}, T) = \sum_{t=1}^T c_{tk} \cdot \exp[-\psi(\vec{\beta}, t_k) t_k] \quad (7.60)$$

onde $i(0, t) = \psi(\vec{\beta}, t)$, e as demais variáveis têm o significado habitual. Nestas condições, os parâmetros do modelo convertem-se em variáveis explicativas, não apenas do valor actual da carteira, mas também do seu valor futuro. Admitindo que imediatamente após a aquisição da carteira se produz um deslocamento da EPTJ, da condição de gradiente nulo resultam as seguintes quatro condições de 1ª ordem:

$$\sum_{k=1}^J n_k \sum_{t=1}^T c_{tk} e^{[\psi(\vec{\beta}, H)H - \psi(\vec{\beta}, t_k)t_k]} \left[H \frac{d\psi(\vec{\beta}, H)}{d\beta_j} - t_k \frac{d\psi(\vec{\beta}, t_k)}{d\beta_j} \right] = 0, \quad j = 0, \dots, 3 \text{ e } \beta_3 = \tau \quad (7.61)$$

Calculando as derivadas e efectuado algumas arrumações, prova-se que as condições de 1ª ordem do problema de imunização podem ser escritas, de forma compacta, segundo:

$$H \frac{d\psi(\bar{\beta}, H)}{d\beta_j} = \sum_{k=1}^J w_k \bar{D}(j)_k, \quad j = 0, \dots, 3 \quad (7.62)$$

onde $\bar{D}(j) = [D(0), \dots, D(3)]$ denota o *vector de durações paramétricas* do modelo de Nelson

e Siegel. O elemento genérico desse vector é definido por $D(j) = -\frac{1}{B(\bar{i})} \frac{dB(\bar{\beta}, T)}{d\beta_j}$, e

calculado, para cada obrigação k , segundo:

$$\begin{aligned} D(0) &= \frac{1}{B(\bar{i})} \sum_{t=1}^T t \cdot c_t e^{-\psi(\bar{\beta}, t)t} \\ D(1) &= \frac{1}{B(\bar{i})} \sum_{t=1}^T c_t e^{-\psi(\bar{\beta}, t)t} \times \tau (1 - e^{-t/\tau}) \\ D(2) &= \frac{1}{B(\bar{i})} \sum_{t=1}^T c_t e^{-\psi(\bar{\beta}, t)t} \times \tau \left[1 - e^{-t/\tau} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \right] \\ D(3) &= \frac{1}{B(\bar{i})} \sum_{t=1}^T t \cdot c_t e^{-\psi(\bar{\beta}, t)t} \times \left[\left(\frac{\beta_1}{t} + \frac{\beta_2}{t} \right) (1 - e^{-t/\tau}) - \left(\frac{\beta_1}{\tau} + \frac{\beta_2}{\tau} \right) e^{-t/\tau} - \beta_2 \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau} \right] \end{aligned} \quad (7.63)$$

Considerando uma carteira formada, no mínimo, por cinco obrigações distintas, se às condições de 1ª ordem juntarmos a restrição orçamental, $\sum_{k=1}^J w_k = 1$, o problema de imunizar a carteira resume-se à resolução do sistema de equações indicado em (7.64).²²⁹ A primeira restrição em (7.64) coincide com a única condição de imunização presumida pelos modelos unifactoriais na presença de deslocamentos paralelos da EPTJ: a igualdade entre a duração da carteira e o HTI. As três restrições seguintes impõem as

(²²⁹) Tal como salientam Prisman e Shores (1988), a verificação simultânea das condições de imunização e da restrição orçamental só é possível admitindo posições negativas em alguns dos componentes da carteira, excepto se existir uma obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTI.

condições necessárias (mas não suficientes)²³⁰ à protecção do valor final do investimento na presença de alterações na inclinação, na curvatura da EPTJ, e na velocidade de convergência das taxas de juro em direcção ao seu nível de longo prazo.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sum_{k=1}^J w_k D(0)_k = H \\
 (2) \quad & \sum_{k=1}^J w_k D(1)_k = \tau(1 - e^{-H/\tau}) \\
 (3) \quad & \sum_{k=1}^J w_k D(2)_k = \tau \left[1 - e^{-H/\tau} \left(1 + \frac{H}{\tau} \right) \right] \\
 (4) \quad & \sum_{k=1}^J w_k D(3)_k = H \left[\left(\frac{\beta_1}{H} + \frac{\beta_2}{H} \right) (1 - e^{-H/\tau}) - \left(\frac{\beta_1}{\tau} + \frac{\beta_2}{\tau} \right) e^{-H/\tau} - \beta_2 \frac{H}{\tau^2} e^{-H/\tau} \right] \\
 (5) \quad & \sum_{k=1}^J w_k = 1
 \end{aligned} \tag{7.64}$$

Os resultados encorajadores obtidos nos testes empíricos realizados por Barrett *et al.* (1995) e Willner (1996) sugerem que o modelo de Nelson e Siegel, porventura com as extensões propostas por Svensson (1994;1995) e Bliss (1989), constitui uma alternativa importante na decomposição do risco de taxa de juro.

7.7. Modelo de Imunização Factorial

Conforme salientámos no ponto 7.3.5., o elevado número de restrições impostas à implementação da estratégia de imunização direccionada (e não direccionada) torna-a de difícil implementação ou, pelo menos, não a distingue da mais convencional estratégia de *cash flow matching*. Deste modo, não existindo à partida informação sobre a direcção que os choques de taxa de juro vão tomar o problema reside na selecção de um

⁽²³⁰⁾ A suficiência da condição de gradiente nulo está condicionada pelo sinal da matriz hessiana. Em termos mais precisos, para garantir que a função tem um mínimo é imprescindível que a matriz das segundas derivadas seja definida positiva.

conjunto reduzido de trajectórias fundamentais. A solução encontrada por Garbade (1986b;1989), Litterman e Scheinkman (1991), Dahl (1993), Barber e Copper (1996), entre outros, é inspirada na teoria da arbitragem pelos preços e está cimentada na identificação dos factores de risco que, sistematicamente, determinam os movimentos das taxas de juro.

A técnica (apresentada de forma resumida no **Anexo 3**) consiste na realização de uma *Análise de Componentes Principais* (ACP), tomando como ponto de partida os dados históricos sobre os choques de taxa de juro para cada maturidade. A ACP permite identificar a direcção e a magnitude das principais fontes de risco decorrentes da dinâmica das taxas de juro. A maioria dos estudos empíricos²³¹ efectuados atesta, em primeiro lugar, que os três primeiros factores são suficientes para explicar a maior parte da volatilidade das taxas de juro e, em segundo lugar, que os *factor loadings* são estáveis ao longo do tempo.²³² Em termos formais, tal significa que $\Delta i(m)$ pode ser aproximado por:

$$\Delta i(m) = \sum_{p=1}^3 L_{pm} F_p + \varepsilon \cong L_{1m} F_1 + L_{2m} F_2 + L_{3m} F_3 \quad (7.65)$$

Por outro lado, os estudos indiciam que sobre os componentes principais é possível formular uma interpretação intuitiva. De facto, constatou-se que o primeiro componente, correspondente ao maior valor próprio de Ω , é essencialmente constante ao longo de todo o espectro de prazos e pode, por isso, ser associado a choques

(²³¹) Veja-se Garbade (1986a;1989), Litterman e Scheinkmann (1991), Jones (1991), Dahl (1993), Knez *et al.* (1994), D'Ecclesia e Zenios (1994), Bühler e Zimmermann (1996), Bliss (1997), Falkenstein e Hanweck (1997), Hill e Vaysman (1998), Phoa (2001), Martellini e Priaulet (2001), entre outros.

(²³²) Falkenstein e Hanweck (1997) propõem, inclusive, uma metodologia para tentar definir o número óptimo de factores a incluir numa estratégia de cobertura. Os autores argumentam que a inclusão do terceiro factor não é desejável, uma vez que tal tenderia a aumentar o erro de cobertura.

paralelos sobre a EPTJ.²³³ Acresce que a magnitude dos seus coeficientes é superior, em valor absoluto, à dos restantes factores, pelo que se conclui que a maior fatia das variações nas taxas de juro é devida aos choques sobre o factor de nível.²³⁴ O segundo componente apresenta um padrão uniformemente crescente ou decrescente, sendo por isso interpretado como estando ligado a alterações na inclinação da EPTJ. O terceiro componente evidencia, regra geral, impactos diferenciados sobre as taxas ao longo da EPTJ, e pode ser interpretado como indicando modificações na curvatura da EPTJ.

A implementação da estratégia de imunização factorial envolve, desde logo, a definição das medidas de sensibilidade da carteira. Diferenciando o preço da obrigação com respeito à taxa de juro e substituindo a equação (7.65), demonstra-se que os conceitos de *duração factorial* [D_{fp}] e *convexidade factorial* [C_{fp}], na direcção indicada pelo factor p , são definidos, respectivamente, por:²³⁵

$$D_{fp} = -\frac{1}{B(\vec{i})} \frac{dB(\vec{i})}{dF_p} = \frac{\sqrt{p}}{B(\vec{i})} \sum_{t=1}^T t \cdot L_{pt} c_t e^{-i(t)t} \quad (7.66)$$

e por:

$$C_{fp} = \frac{1}{B(\vec{i})} \frac{d^2 B(\vec{i})}{dF_p^2} = \frac{(\sqrt{p})^2}{B(\vec{i})} \sum_{t=1}^T t^2 L_{pt}^2 c_t e^{-i(t)t} \quad (7.67)$$

(233) A excepção é dada pelo estudo de Bühler e Zimmermann (1996) para o mercado Suíço.

(234) Estes resultados confirmam, de algum modo, as conclusões de Ilmanen (1992) relativamente à performance da tradicional duração aditiva em comparação com modelos mais sofisticados. De facto, apesar dos modelos de Macaulay e Fisher e Weil se basearem numa premissa errada (choques paralelos sobre a EPTJ), a evidência de que o primeiro componente principal explica a maior parte das oscilações nas taxas de juro é suficiente para justificar a razão pela qual os modelos mais sofisticados não apresentam performances de imunização sistematicamente superiores.

(235) A multiplicação de (7.65) pelo factor \sqrt{p} destina-se a assegurar que, no caso de todos elementos do vector normalizado assumirem igual magnitude, a duração factorial apresenta o mesmo valor que a duração aditiva de Fisher e Weil. Como se observa, os conceitos de duração e convexidade factorial não traduzem mais do que os já familiares conceitos de duração e convexidade direccionais, neste caso nas direcções providenciadas pelos componentes principais. A relação entre as *key-rate durations*, a estatística VAR e a metodologia dos componentes principais é posta em evidência por Golub e Tilman (1997), Singh (1997) e Bühler e Zimmermann (1996).



Posto isto, as condições de imunização factorial (de 1ª e 2ª ordem) não diferem substancialmente das imbuídas nos modelos anteriores e requerem, para além da habitual restrição de autofinanciamento da estratégia: (i) a igualdade entre a duração factorial dos activos e dos passivos, (ii) que a convexidade factorial dos activos nunca seja inferior ao valor correspondente para as responsabilidades.²³⁶

A estratégia de imunização factorial é compatível com a tradicional imunização contra choques paralelos. A sua versatilidade confere ainda ao investidor a faculdade de adoptar coberturas selectivas seleccionando, designadamente, apenas os factores relativamente aos quais se antecipam oscilações.²³⁷

Às potencialidades que esta técnica oferece é necessário contrapor, todavia, algumas críticas relevantes. A mais pertinente, porque encontra suporte em estudos empíricos, respeita à hipótese (implícita) de que a matriz de correlações é estacionária sendo, por isso, insensível ao intervalo de amostragem utilizado para estimar os componentes principais. Phoa (2001) sublinha ainda uma segunda limitação importante, respeitante ao facto da ACP identificar o padrão de choques de taxa de juro por maturidade, assumindo assim que o mercado é homogéneo nas demais características.²³⁸

(²³⁶) A tradicional estratégia de imunização considerando um HTI fixo e único pode ser tratada como um caso particular desta abordagem. Para mais detalhes sobre a formulação da *estratégia de imunização factorial* em termos de um problema de programação linear veja-se, por exemplo, Dahl (1993, pp.200). Para uma ilustração da *estratégia de cobertura factorial* utilizando os dados fornecidos pelo método dos componentes principais veja-se, por exemplo, Martellini e Priaulet (2001).

(²³⁷) Num outro contexto, a utilização da distribuição dos componentes principais para aproximar a verdadeira distribuição das taxas de juro fornece um enquadramento importante para a simulação de cenários possibilitando, de forma mais rigorosa, o cálculo da exposição da carteira e a realização de *stress tests*. Para mais detalhes sobre este tema ou sobre o cálculo do *Value at Risk* com base em cenários de taxa de juro veja-se, por exemplo, Jamshidian e Zhu (1997) e Hill e Vaysman (1998).

(²³⁸) Esta hipótese negligencia, por exemplo, as diferenças explicadas pelo grau de liquidez dos vários activos.

III. Modelos de Risco de Taxa de Juro para Activos com Cash Flows Incertos

Os modelos apresentados nos capítulos precedentes foram desenvolvidos, na sua grande maioria, com o intuito de especificar as características de risco de taxa de juro de activos com cash flows fixos, ou seja, de fluxos financeiros conhecidos com certeza no momento em que o investidor é confrontado, quer com o problema da determinação do preço, quer com a necessidade de conceber estratégias de cobertura ou imunização.

O desenvolvimento dos mercados financeiros registado nas últimas duas décadas conduziu ao aparecimento de um conjunto de produtos cujos fluxos monetários (e/ou o próprio período de vida) são fortemente condicionados pela trajectória futura, incerta, das taxas de juro.²³⁹ Para esta categoria de activos, as taxas de juro constituem um factor de risco transcendental na medida em que determinam, simultaneamente, a estrutura de pagamentos futura do título, e o seu valor actual, via operação de desconto.

Como advertimos no capítulo 4, Ingersoll *et al.* (1978) demonstram que a imposição antecipada de alguns processos estocásticos para a EPTJ é inconsistente com a existência de equilíbrio nos mercados. Por conseguinte, ao contrário de alguns dos modelos determinísticos analisados anteriormente, para os quais a natureza estocástica das taxas de juro era, ou arbitrariamente pré-determinada, ou condicionada pela especificação paramétrica adoptada para a EPTJ, a incerteza subjacente à evolução futura das taxas de juro exige que o seu comportamento seja modelizado em termos de uma variável aleatória (estocástica).

(²³⁹) Deste grupo de activos, habitualmente designados por derivados de taxa de juro (*interest rate contingent claims*, ou *interest rate derivatives* na terminologia anglo-saxónica), fazem parte: as opções sobre obrigações, *caps* e *floors* de taxa de juro, *swaptions*, obrigações de taxa variável, obrigações com opção (de compra ou de venda) incorporada e obrigações convertíveis, contratos de *swap*, opções implícitas em activos titularizados, contratos de futuros, produtos oferecidos por companhias de seguros, etc.

Na modelização do comportamento aleatório das taxas de juro devem, no entanto, ser tidas em conta um conjunto de características peculiares desta variável, que distinguem a sua trajectória da seguida, por exemplo, pelos preços das acções ou pelas taxas de câmbio. Um primeiro aspecto a considerar refere-se ao facto de, regra geral, as taxas de juro nominais não exibirem valores negativos. O segundo está relacionado com alguma evidência empírica que sustenta que as taxas de juro exibem uma espécie de tendência de reversão em direcção a uma média (constante) de longo prazo.²⁴⁰

Em terceiro lugar a volatilidade das taxas de juro não é homogénea ao longo de toda a EPTJ, com as taxas de curto prazo a evidenciarem, regra geral, uma maior volatilidade. Quarto, a correlação entre as taxas de juro ao longo da EPTJ é imperfeita, em especial no seu segmento curto. Por último, e citando Chan *et al.* (1992, pp. 1224), «*The models that best describe the dynamics of interest rates are those that allow the conditional volatility of interest rate changes to be highly dependent on the level of the interest rate*», ou seja, aqueles que incorporam a característica de heterocedasticidade das taxas de juro.

O crescente interesse pela modelização do comportamento estocástico das taxas de juro (e dos seus derivados) tem reflexo numa literatura extensa e variada que, imagine-se,

⁽²⁴⁰⁾ Dito de outro modo, valores altos (baixos) para as taxas de juro tendem a ser seguidos por decréscimos (subidas), a uma determinada velocidade de ajustamento. Os estudos empíricos realizados por Chan *et al.* (1992) revelam, contudo, que o comportamento de reversão a uma *constante de longo prazo* das taxas de juro é relativamente fraco, e que a evidência aponta mais no sentido de uma reversão em direcção à *média das taxas de curto prazo*. Este fenómeno foi incorporado, por exemplo, nos modelos de Kraus e Smith (1993), Chen (1996) e Balduzzi *et al.* (1996). Ainda assim, existem argumentos económicos relativamente sólidos para justificar o fenómeno de reversão das taxas de juro. Com efeito, quando as taxas de juro são altas (baixas) existem fortes motivações para uma redução (aumento) da procura agregada, e para uma diminuição (aumento) da procura de fundos e consequente redução (aumento) das taxas de juro. Para as famílias, por exemplo, uma taxa de juro alta (baixa) significa um incentivo no sentido de transferir consumo presente (futuro) para consumo futuro (presente), fortalecendo a poupança (o consumo). Para as empresas, taxas de juro altas significam custos de financiamento (explícitos ou implícitos) acrescidos na implementação de um projecto de investimento, desincentivando deste modo a sua realização.

continua a crescer. Não obstante, é prática comum agrupar as diferentes metodologias em duas grandes categorias. No primeiro grupo de abordagens, do qual fazem parte os modelos de Black e Scholes (1973) e Schaefer e Schwartz (1987), o valor dos derivados de taxa de juro é determinado com base no pressuposto de que a fonte de risco implícita corresponde ao preço do activo subjacente.²⁴¹

Apesar da simplicidade do método, a aplicação do modelo de Black e Scholes às opções sobre obrigações revela-se, na maioria dos casos, desajustada, e isto porque, como assinalam Courtadon (1993) e Ho (1995), quatro características essenciais distinguem os activos subjacentes (acções *vs* obrigações) e violam as premissas do modelo:

- i) As obrigações subjacentes pagam cupões, ou seja, geram rendimentos;²⁴²
- ii) Se exceptuarmos o caso das obrigações perpétuas, as obrigações têm maturidade finita, o que condiciona as trajectórias possíveis para o activo subjacente. Este comportamento viola necessariamente a hipótese, muitas vezes assumida para as distribuições de probabilidade dos preços de acções, de que a variância está relacionada de forma linear com o tempo²⁴³;

(²⁴¹) Esta metodologia, bastante genérica, é usada essencialmente para determinar o preço de posições básicas em derivados de taxas de juro (*caps, floors, swaptions*). O resultado mais conhecido desta prática refere-se a uma adaptação do modelo de avaliação de opções sobre acções proposto por Black e Scholes (1973) na avaliação de opções sobre obrigações usando a fórmula derivada por Black (1976).

(²⁴²) O efeito produzido pelo pagamento de um cupão no preço de uma obrigação é similar ao efeito induzido pelo pagamento de dividendos na cotação de mercado de uma acção.

(²⁴³) Esta característica tem consequências imediatas ao nível da distribuição do retorno instantâneo da obrigação. De facto, a redução do período de vida do título e a convergência do seu preço de mercado para o valor de reembolso na data de vencimento implicam que a variância da distribuição decresce ao longo do tempo. Black (1976) sugere a resolução deste problema avaliando a opção com respeito ao valor futuro (mais propriamente na data de vencimento da opção) do activo subjacente. Ball e Torous (1983) defendem uma solução alternativa e desenvolvem o chamado “*Bridge Process*”, onde a incorporação deste fenómeno de convergência é feita modificando a tendência do processo estocástico seguido pelo preço da obrigação, assumindo, todavia, que a variância do retorno instantâneo do título é constante. Schaefer e Schwartz (1987) propõem uma aproximação mais realista considerando que a variância é uma função da duração da obrigação subjacente.

- iii) A hipótese de que a taxa de financiamento (ou *cost of carry*) é constante no modelo é claramente inconsistente com a assunção de que os preços das obrigações (ou, de forma equivalente, as taxas de juro) são estocásticos;
- iv) Por último, a existência da faculdade de exercício antecipado da opção, mormente nos casos em que as opções são do tipo americano, requer a avaliação do título em todos e cada um dos possíveis estados da natureza.

O segundo conjunto de metodologias, onde se incluem as abordagens de Merton (1973), Vasicek (1977), Cox *et al.* (1985), Ho e Lee (1986), Heath *et al.* (1990;1992), entre outras, agrupa modelos onde se considera que, quer o valor dos activos derivados, quer o valor dos próprios activos subjacentes, são função da incerteza induzida pelo comportamento estocástico das taxas de juro.

Entre esta última categoria é ainda usual fazer-se a distinção entre os denominados *modelos de equilíbrio*, modelos que partem de hipóteses sobre o comportamento estocástico de uma ou mais variáveis de estado (fontes de incerteza), a partir das quais são derivados os preços de activos contingentes impondo restrições de não arbitragem, e os chamados *modelos de não arbitragem*, onde a dinâmica de toda a estrutura de taxas é definida de modo a torná-la automaticamente consistente com os dados de mercado.

Nos capítulos 8 e 9 analisamos, de forma sucinta²⁴⁴, os principais *modelos de equilíbrio* e de *não arbitragem* para a EPTJ, colocando especial ênfase na determinação de medidas de risco de taxa de juro (*durações estocásticas*) e na reformulação das estratégias de cobertura e imunização.

(²⁴⁴) Para uma análise mais pormenorizada recomendamos a leitura de Rebonato (2000), Martellini e Priaulet (2001), Strickland (1996a;1996b), Ho (1995), Vetzal (1994), Courtadon (1993), Risk Publications (1996), Hull (2000), Duffie (1996), Wilmott (1998), Jarrow (1996) e Clewlow e Strickland (1998).

8. Modelos de Equilíbrio para a Estrutura por Prazos das Taxas de Juro

Segundo Brennan e Schwartz (1983), os *modelos de equilíbrio*²⁴⁵ para a EPTJ assumem que os valores das obrigações, isentas de risco de incumprimento, e de várias maturidades, podem ser explicados convenientemente pelos processos estocásticos seguidos, ao longo do tempo, por um conjunto reduzido de variáveis de estado. A especificação do processo estocástico pode ser consumada de forma exógena, ou determinada endogenamente a partir de modelos de equilíbrio geral para a EPTJ²⁴⁶ assumindo, neste último caso, hipóteses sobre as preferências dos investidores e sobre a tecnologia de produção.

A especificação convencional dos modelos de equilíbrio apenas define um número de pontos na EPTJ igual ao número de variáveis de estado usadas. Deste modo, e porque o objectivo é caracterizar toda a EPTJ, os preços de obrigações com maturidade diferente devem satisfazer um conjunto de relações de consistência interna por forma a eliminar oportunidades de arbitragem no mercado.²⁴⁷ Definidas estas relações, o cálculo dos preços de equilíbrio é conseguido a partir da resolução de uma determinada equação diferencial parcial.

Dois critérios servem de base à diferenciação dos modelos de equilíbrio para a EPTJ: o número de variáveis de estado contempladas, e o processo estocástico (ou equação de difusão) para elas assumido.

(²⁴⁵) Também designados por *modelos de arbitragem* para a estrutura por prazos das taxas de juro.

(²⁴⁶) Veja-se os modelos de Cox, Ingersoll e Ross (1985;1985a) e Longstaff e Schwartz (1992a).

(²⁴⁷) Assinale-se, contudo, que estas restrições de consistência interna não asseguram o ajustamento automático dos preços obtidos pelo modelo aos valores observados no mercado.

8.1. Modelos de Arbitragem com Base Numa Única Variável de Estado

Estes modelos, conhecidos na literatura por *single-factor models*, admitem que a EPTJ pode ser derivada a partir do comportamento de uma única variável de estado, regra geral uma taxa de juro com prazo instantâneo, ou seja, uma taxa aplicável a um empréstimo com prazo infinitamente reduzido.²⁴⁸ Tratam-se, em suma, de modelos que envolvem apenas uma fonte de incerteza, e que diferem entre si essencialmente pela circunstância de prescreverem distintos processos estocásticos para as taxas de juro. Começaremos por enunciar as hipóteses implícitas no raciocínio de arbitragem, para em seguida derivar a equação fundamental a ser respeitada pelos preços das obrigações.

8.1.1. Condições de Arbitragem e Equação Fundamental para o Preço das Obrigações

Num trabalho pioneiro, Vasicek (1977) define as restrições necessárias à eliminação de oportunidades de arbitragem no contexto dos processos estocásticos seguidos pelos preços de obrigações. O autor assume um conjunto de hipóteses fundamentais na formulação do raciocínio de arbitragem:

- i) A taxa de juro *spot* (instantânea), $r(t)$, segue um processo de difusão do tipo de Markov, definido pela seguinte equação:

$$dr(t) = \mu_r(r, t)dt + \sigma_r(r, t)dW_t \quad (8.1)$$

⁽²⁴⁸⁾ A opção pela taxa de curto prazo como veículo condutor da dinâmica das taxas de juro ao longo da EPTJ está ancorada no argumento de que as taxas para as demais maturidades exibem uma correlação perfeita, e no princípio segundo o qual a taxa de curto prazo traduz de forma imediata a incerteza associada, por exemplo, a alterações de política monetária.

onde $\mu_r(r,t)$ e $\sigma_r(r,t)$ representam, por esta ordem, o valor esperado e o desvio padrão da variação na taxa de juro instantânea, dt simboliza uma variação infinitesimal no tempo, e dW_t denota um processo *standard* de Wiener, isto é, $dW_t \sim N(0, dt)$.

- ii) O preço, no momento t , de uma obrigação de cupão zero que paga uma unidade monetária na data de vencimento T , para $T > t$, é função da taxa de juro instantânea, ou seja, $P(t,T) = P(t,T,r)$;
- iii) O mercado é eficiente, isto é, não existem custos de transacção ou impostos; é possível realizar operações a descoberto; a informação é simultaneamente disponibilizada a todos os investidores; cada investidor actua de forma racional (prefere mais riqueza a menos riqueza e utiliza toda a informação disponível); o diferencial de rendibilidade de uma obrigação face à taxa de juro sem risco é proporcional ao risco do título;
- iv) Não existe risco de incumprimento por parte do devedor.

Da aplicação do raciocínio de arbitragem (apresentado em detalhe no **Anexo 4**) resulta a seguinte *equação diferencial parcial fundamental*²⁴⁹ para $P(t,T)$ ²⁵⁰:

$$\frac{dP}{dr} [\mu_r(r,t) - \lambda(r,t) \sigma_r(r,t)] + \frac{dP}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{dr^2} \sigma_r^2(r,t) - rP = 0 \quad (8.2)$$

⁽²⁴⁹⁾ A equação diferencial (8.2) tem uma interpretação intuitiva quando escrita em termos de duração e convexidade. Com efeito, se substituirmos em (8.2) as expressões obtidas em (4.4) e (6.5) para a duração modificada e para a convexidade, respectivamente, ficamos com:

$$-D_m P [\mu_r(r,t) - \lambda(r,t) \sigma_r(r,t)] + \frac{1}{2} CP \sigma_r^2(r,t) + \frac{dP}{dt} = rP$$

Posto isto, e admitindo que as hipóteses assumidas são válidas, a equação acima determina que a taxa de retorno instantâneo da obrigação (ajustada pelo risco) deve ser igual à taxa de juro sem risco.

⁽²⁵⁰⁾ Equação similar pode ser obtida, por exemplo, para uma obrigação clássica.

Adicionadas as indispensáveis condições limite²⁵¹ (ou de fronteira), a resolução da equação (8.2) por métodos analíticos ou numéricos permite, em cada momento t , calcular o preço de equilíbrio de uma obrigação de cupão zero. A solução desta equação pode, no entender de Duffie (1996), ser representada por:

$$P(t, T, r) = E_t^{\tilde{P}} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \right] \quad (8.3)$$

Ou seja, na ausência de oportunidades de arbitragem o preço de uma obrigação é igual ao valor esperado dos seus cash flows futuros, descontados segundo uma medida de probabilidade \tilde{P} neutra face ao risco. A equação (8.2) está formulada em termos perfeitamente genéricos. No sentido de a tornar operacional derivando, por exemplo, soluções fechadas para o preço de uma obrigação e medidas de duração estocástica, é necessário especificar o tipo de activo a ser avaliado (seleccionando as respectivas condições de fronteira), as variáveis de estado, e todos os parâmetros que caracterizam os processos de difusão, incluindo o preço de mercado para o risco. Analisaremos, em seguida, alguns dos principais modelos apresentados na literatura.

8.1.2. Processo Estocástico Seguido pelas Taxas de Juro

Os modelos de factor único assumem invariavelmente que a taxa de juro com prazo instantâneo é a única variável de estado relevante. Desde o trabalho pioneiro de Merton (1973) que múltiplas tentativas têm sido conduzidas para especificar o processo estocástico que melhor explica o comportamento empírico das taxas de juro. O quadro 8.1 resume algumas das principais contribuições:

(²⁵¹) Recorde-se que no caso das obrigações de cupão zero a condição limite corresponde simplesmente a $P(T, T, r) = 1$.

Quadro 8.1: Processos Estocásticos para a Taxa de Juro de Curto Prazo

Modelo	$\mu(r,t)$	$\sigma(r,t)$	$\lambda(r,t)$
Merton (1973)	Θ	σ	0
Vasicek (1977)	$a(\Theta - r_t)$	σ	λ
Dothan (1978)	0	σr_t	λ
Rendleman e Barter (1980)	$a r_t$	σr_t	λ
Brennan e Schwartz (1980) e Courtadon (1982)	$a(\Theta - r_t)$	σr_t	λ
Cox, Ingersoll e Ross (1985)	$a(\Theta - r_t)$	$\sigma\sqrt{r_t}$	$\lambda\sqrt{r_t}/\sigma$

8.1.2.1. Modelo de Merton

O modelo de passeio aleatório de Merton (1973) assume que a taxa de juro de curto prazo segue um movimento Browniano aritmético (*arithmetic Brownian motion*):

$$dr_t = \Theta dt + \sigma dW_t \quad (8.4)$$

onde Θ e σ são constantes no tempo. Invocando a já mencionada hipótese de expectativas locais, o autor assume ainda que o preço de mercado do risco é nulo, isto é, $\lambda(r,t) = 0$. Nestas condições, se substituirmos na equação (8.2) os parâmetros da equação de difusão especificada em (8.4), e recuperarmos a já mencionada condição de fronteira, obtemos a seguinte expressão analítica para o preço de uma obrigação de cupão zero que paga uma unidade monetária na data de vencimento T :

$$P(t,T,r_t) = \exp \left[-(T-t)r_t - \frac{\Theta(T-t)^2}{2} + \frac{\sigma^2(T-t)^3}{6} \right] \quad (8.5)$$

A taxa *spot* correspondente é calculada a partir de (8.5) usando a relação fundamental $r(t,T) = -\log P(t,T,r)/(T-t)$:

$$r(t,T) = r_t + \frac{\Theta(T-t)}{2} - \frac{\sigma^2(T-t)^2}{6} \quad (8.6)$$

O modelo de Merton exhibe um conjunto de propriedades indesejáveis, inerentes à hipótese de passeio aleatório. A principal refere-se à possibilidade de ocorrerem taxas muito altas (positivas ou negativas) no futuro.²⁵² Apesar disso, o modelo constitui uma referência válida na determinação das características de risco de taxa de juro de activos contingentes. Analisamos, em seguida, duas aplicações importantes do modelo.

Vector de Duração Para Opções Sobre Obrigações

Nawalkha (1995) incorpora a versão em tempo contínuo do modelo do vector de duração na formulação de Merton para a determinação do preço de opções sobre obrigações. Em seguida, analisa as características de risco de taxa de juro de opções sobre obrigações de cupão zero, e de obrigações com opção incorporada. Aceitando que os choques sobre as taxas *forward* são suaves e infinitesimais, Nawalkha demonstra que o retorno de uma obrigação de cupão zero pode ser representado por:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t) \cdot dt - D(t,T) \cdot Y(t) + \varepsilon_B(t) \quad (8.7)$$

onde $r(t)$ denota a taxa de juro sem risco, $D(t,T)$ define o *equivalente em tempo contínuo* para o *vector de duração* derivado no capítulo 7, de elemento representativo $D^u(t,T) = (T-t-dt)^u$, $u = 1,2,\dots,m$ ²⁵³, $\varepsilon_B(t)$ denota o elemento residual na aproximação e $Y(t)$ simboliza o vector (coluna) para os choques sobre as taxas *forward*.

(²⁵²) No limite, e como se verifica pela equação (8.6), à medida que a maturidade tende para ∞ a taxa de juro tende para $-\infty$ e o preço das obrigações de cupão zero tende para $+\infty$, uma trajetória muito pouco consentânea com a evidência dos mercados.

(²⁵³) À medida que $dt \rightarrow 0$, o primeiro elemento deste vector (linha), $D^1(t,T) = (T-t-dt)$, converge para a *duração aditiva* de uma obrigações de cupão zero (o tempo até à maturidade) e mede a sensibilidade face a choques paralelos sobre a EPTJ *forward*. De forma similar, o segundo elemento desse vector, $D^2(t,T) = (T-t-dt)^2$, converge para o conceito de *convexidade* de uma obrigação de cupão zero. As medidas de duração de ordem superior em (8.7) têm interpretação análoga.

Assumindo que o preço de uma opção de compra (*call option*) do tipo europeu $C^{all}(t)$ pode, no momento t , ser expresso em termos de uma função continuamente diferenciável com respeito ao valor actual das obrigações e ao tempo que resta até à maturidade, Merton (1973) demonstra que:²⁵⁴

$$dC^{all}(t) = \frac{\partial C^{all}(t)}{\partial P(t,T)} \cdot dP(t,T) + \frac{\partial C^{all}(t)}{\partial P(t,\tau)} \cdot dP(t,\tau) \quad (8.8)$$

onde $P(t,T)$ e $P(t,\tau)$ representam os preços das obrigações de cupão zero subjacente ao contrato de opção, e com maturidade na data de vencimento da opção, respectivamente. Se substituirmos na equação (8.8) os valores de $dP(t,T)$ e $dP(t,\tau)$, derivados segundo (8.7), demonstra-se que:

$$\frac{dC^{all}(t)}{C^{all}(t)} = r(t) \cdot dt - D^{call}(t) \cdot Y(t) + \varepsilon_c(t) \quad (8.9)$$

onde $D^{call}(t)$ define o seguinte *vector de duração para uma opção de compra*.²⁵⁵

$$D^{call}(t) = e_{c1} \cdot D(t,T) + e_{c2} \cdot D(t,\tau) \quad (8.10)$$

(²⁵⁴) Refira-se a propósito que a fórmula obtida por Merton (1973) para o preço de uma opção de compra do tipo europeu sobre uma obrigação de cupão zero com maturidade em T , preço de exercício E , e vencimento em τ é dada por:

$$C^{all}(t) = P(t,T) \cdot N(d_1) - P(t,\tau) \cdot E \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln[P(t,T)/P(t,\tau) \cdot E] + V/2}{\sqrt{V}} \quad , \quad d_2 = d_1 - \sqrt{V}$$

$$V = \int_t^\tau \sigma(s,\tau)^2 + \sigma(s,T)^2 - 2 \cdot \sigma(s,\tau) \cdot \sigma(s,T) \cdot \rho(s,\tau,T) ds$$

(²⁵⁵) Se representarmos por $P^{put}(t)$ o preço de uma opção de venda (*put option*) sobre uma obrigação de cupão zero, demonstra-se que o seu vector de duração $D^{put}(t)$ é dado por:

$$D^{put}(t) = e_{p1} \cdot D(t,T) + e_{p2} \cdot D(t,\tau)$$

onde

$$e_{p1} = \left[\frac{\partial P^{put}(t)}{\partial P(t,T)} \right] \left/ \left[\frac{P^{put}(t)}{P(t,T)} \right] \right. \quad \text{e} \quad e_{p2} = \left[\frac{\partial P^{put}(t)}{\partial P(t,\tau)} \right] \left/ \left[\frac{P^{put}(t)}{P(t,\tau)} \right] \right.$$

$$P^{put}(t) = E \cdot N(-d_2) \cdot P(t,\tau) - N(-d_1) \cdot P(t,T)$$

$$\text{onde: } e_{c1} = \left[\frac{\partial C^{all}(t)}{\partial P(t, T)} \right] \bigg/ \left[\frac{C^{all}(t)}{P(t, T)} \right] \quad \text{e} \quad e_{c2} = \left[\frac{\partial C^{all}(t)}{\partial P(t, \tau)} \right] \bigg/ \left[\frac{C^{all}(t)}{P(t, \tau)} \right] \quad (8.11)$$

e onde $\varepsilon_c(t)$ denota o termo residual na aproximação. A equação (8.9) diz-nos que o retorno de uma opção de compra é igual à taxa de juro sem risco menos o produto de um vector de duração por um vector de choques de taxa de juro. O vector $D^{all}(t)$ é calculado através de uma média ponderada dos vectores de duração das obrigações $P(t, T)$ e $P(t, \tau)$. Os ponderadores são dados, neste caso, pelas elasticidades da opção com respeito aos preços de ambas as obrigações.

O vector de duração dado pela equação (8.10) representa um avanço significativo face às tradicionais medidas de duração para opções sobre activos onde, regra geral, se assume que a EPTJ é horizontal, que os choques de taxa de juro são do tipo paralelo e infinitesimal, e que o activo subjacente é insensível às variações nas taxas de juro, ou seja, tem duração nula.²⁵⁶ Com base na equação (8.10) é ainda possível concluir que o vector de duração para a obrigação de cupão zero subjacente à *opção de compra* constitui um *limite inferior* para o vector de duração da opção.²⁵⁷

(²⁵⁶) A título de exemplo, Garman (1985) usa o modelo de avaliação de opções de Black e Scholes para derivar uma medida de duração que é equivalente ao vector de duração expresso em (8.10) mas onde se considera apenas o segundo termo, ou seja, admite-se que $e_{c1} \cdot D(t, T) = 0$. Acresce que a medida de duração desenvolvida por Garman é sempre negativa, um comportamento esperado para opções de venda, mas inadmissível para opções de compra. A justificação para este resultado é simples se recordarmos que a fórmula de Black Scholes para uma opção de compra é baseada num raciocínio de arbitragem construído a partir de uma carteira formada por duas obrigações (uma posição longa no valor de $N(d_1) \cdot P(t, T)$, e uma posição curta no valor de $-N(d_2) \cdot P(t, \tau)$). Posto isto, facilmente se verifica que $e_{c2} \leq 0$ e que, por isso, $D^{all}(t) = e_{c2} \cdot D(t, \tau) \leq 0$.

(²⁵⁷) Por outras palavras, para um mesmo choque de taxa de juro definido pelo vector $Y(t)$, a sensibilidade da opção é maior do que a sensibilidade da obrigação subjacente, ou seja, a assunção de uma posição em derivados amplifica o risco de taxa de juro da carteira. De forma similar, o vector de duração da obrigação de cupão zero com maturidade na data de vencimento da opção constitui um *limite superior* para o vector de duração de uma *opção de venda*.

Vector de Duração Para Obrigações com Opção de Compra Incorporada

A equação de retorno para a opção de compra derivada em (8.9) pode ainda ser usada para calcular um vector de duração para obrigações de cupão zero com opção de compra incorporada (*callable bonds*).²⁵⁸ Representemos $P^{cB}(t, T)$ o preço, no momento t , de uma obrigação com maturidade em T , que pode ser recomprada pelo emitente no momento S ($t < S < T$) ao preço de exercício E . Seja $P(t, T)$ o preço da obrigação sem opção de compra correspondente. O valor de mercado de $P^{cB}(t, T)$ pode ser representado por uma carteira constituída por uma posição longa na obrigação subjacente, e por uma posição curta numa opção de compra do tipo europeu:²⁵⁹

$$P^{cB}(t, T) = P(t, T) - C^{all}(t) \quad (8.12)$$

Se substituirmos no diferencial de (8.12) as equações (8.7) e (8.9), prova-se que a taxa de retorno instantâneo é determinada neste caso por:

$$\frac{dP^{cB}(t)}{P^{cB}(t)} = r(t) \cdot dt - D^{cB}(t) \cdot Y(t) + \varepsilon_{cB}(t) \quad (8.13)$$

onde $\varepsilon_{cB}(t)$ denota o termo residual na aproximação, e $D^{cB}(t)$ define o seguinte *vector de duração para uma obrigações com opção de compra incorporada*.

⁽²⁵⁸⁾ Para uma análise às características de risco de taxa de juro de obrigações convertíveis ver Brooks e Attinger (1992) e Mehran e Homaifar (1993).

⁽²⁵⁹⁾ Para além desta metodologia, Dunetz e Mahoney (1988, pp. 62) enunciam duas abordagens alternativas na avaliação e determinação das características de risco de taxa de juro de obrigações com opção de compra incorporada. A primeira, e mais simples, consiste em ignorar a presença da opção de compra. A segunda, mais realista, consiste em tratar as obrigações transaccionadas *a desconto* (aquelas para as quais a opção está “*out-of-money*”) tomando como referência a sua maturidade, calculando então a denominada *duration to maturity*, e as obrigações transaccionadas “*com prémio*” tomando como bitola a data em que a opção pode ser exercida, obtendo-se então a chamada *duration to call*. Douglas (1990) aconselha uma solução intermédia calculando uma média ponderada entre a *duration to call* e a *duration to maturity*, partindo de uma avaliação subjectiva quanto à probabilidade de a opção vir a ser exercida.

$$D^{cB}(t) = e_{cB1} \cdot D(t, T) + e_{cB2} \cdot D(t, S) \quad (8.14)$$

onde:²⁶⁰

$$e_{cB1} = \left[\frac{\partial P^{cB}(t)}{\partial P(t, T)} \right] \bigg/ \left[\frac{P^{cB}(t)}{P(t, T)} \right] \text{ e } e_{cB2} = \left[\frac{\partial P^{cB}(t)}{\partial P(t, S)} \right] \bigg/ \left[\frac{P^{cB}(t)}{P(t, S)} \right] \quad (8.15)$$

Verifica-se assim que o vector $D^{cB}(t)$ é dado por uma média ponderada dos vectores de duração da obrigação subjacente e da obrigação com maturidade na data em que a obrigação pode ser recomprada, onde os ponderadores correspondem uma vez mais às elasticidades da opção com respeito aos preços de ambas as obrigações.

A medida de risco avançada em (8.14) constitui uma versão generalizada das medidas de duração para obrigações com opção incorporada derivadas por Dunetz e Mahoney (1988), Fabozzi (1988), Jamshidian e Zhu (1988) e Douglas (1990). Com efeito, as medidas de duração alvitradas por estes autores, conhecidas na literatura por *call-adjusted durations*, resumem o risco de taxa de juro do activo a choques sobre a TRA e, sobretudo, negligenciam o impacto da duração da obrigação que vence na data de exercício da opção sobre o risco da posição, i.e., admitem que $e_{cB2} \cdot D(t, S) = 0$.²⁶¹

Refira-se ainda, para terminar, que o vector de duração da obrigação subjacente e o vector de duração da obrigação com vencimento na data de exercício da opção constituem, por esta ordem, os *limites superior* e *inferior* para o vector $D^{cB}(t)$, ou seja,

$$D(t, S) \leq D^{cB}(t) \leq D(t, T) .$$

⁽²⁶⁰⁾ O preço de uma obrigação com opção de compra incorporada derivado a partir do modelo de Merton (1973) é dado por:

$$P^{cB}(t) = [1 - N(d_1)] \cdot P(t, T) + P(t, S) \cdot E \cdot N(d_2)$$

⁽²⁶¹⁾ Como acentua Nawalkha (1995), nos casos em que a data de exercício da opção é distante no futuro esta solução pode introduzir erros consideráveis no cálculo da duração para obrigações com opção de compra incorporada.

8.1.2.2. Modelo de Vasicek

O modelo de Vasicek (1977) assenta na especificação de um processo estocástico do tipo *Ornstein-Uhlenbeck* para a taxa de juro de curto prazo, com a seguinte representação:

$$dr_t = a(\Theta - r_t)dt + \sigma dW_t \quad (8.16)$$

onde Θ e a representam, respectivamente, o nível e a velocidade de ajustamento em direcção ao valor normal de longo prazo da taxa de juro instantânea, e r_t denota o seu nível actual. O modelo exhibe a desejável propriedade de reversão à média.²⁶² A componente aleatória em (8.16) depende de um parâmetro constante de volatilidade σ . No modelo de Vasicek o risco é capturado assumindo que o seu preço de mercado $\lambda(t, r) \equiv \lambda$ é constante ao longo de toda a EPTJ. As hipóteses do modelo preconizam ainda uma distribuição normal para a taxa de juro.²⁶³ Esta assunção implica, infelizmente, que existe uma probabilidade positiva de as taxas de juro se tornarem negativas. A solução da equação diferencial (8.2) para $P(t, T, r)$ é agora dada por:²⁶⁴

$$P(t, T, r_t) = \exp \left[\frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) (r_\infty - r_t) - (T-t) r_\infty - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right] \quad (8.17)$$

(²⁶²) O termo $a(\Theta - r_t)$ em (8.16) representa uma força que puxa permanentemente a taxa de juro para o seu nível de longo prazo Θ , a uma velocidade de ajustamento a que é proporcional ao desvio do processo face à sua média.

(²⁶³) Deve salientar-se ainda que a estrutura de volatilidade para as taxas *spot* é definida exclusivamente pelos parâmetros σ e a que determinam, respectivamente, o nível geral de volatilidade para a taxa de juro de curto prazo e a velocidade a que a volatilidade diminui à medida que a maturidade aumenta. Em resumo, o modelo é compatível com a evidência de que as taxas de juro de longo prazo são menos voláteis do que as taxas de curto prazo.

(²⁶⁴) Assinale-se, neste ponto, que o modelo de Dothan (1978) pode ser derivado a partir do modelo de Vasicek (1977) impondo a restrição $a = 0$. A solução da equação diferencial deste modelo é dada por:

$$P(t, T, r_t) = \exp \left[\frac{\sigma(T-t)^3}{6} - (T-t) r_t \right]$$

Prova-se igualmente que a duração estocástica calculada para o modelo de Dothan coincide com a duração aditiva de Fisher e Weil.

onde $r_{\infty} = \Theta + \frac{\sigma\lambda}{a} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{a^2}$ representa a taxa de juro para uma obrigação com maturidade infinita. A EPTJ é calculada a partir de (8.17) fazendo uso, como é habitual, da seguinte relação: $r(t, T) = -\log P(t, T, r)/(T - t)$.²⁶⁵

No capítulo 4 afirmámos que a duração de uma obrigação pode ser interpretada como uma medida do risco associado a choques não antecipados sobre a EPTJ. Para a duração aditiva de Fisher e Weil, por exemplo, assumimos que as variações não antecipadas tinham origem em choques paralelos sobre a EPTJ, tendo-se então admitido que todas as taxas *spot* têm a mesma variância e são perfeitamente correlacionadas. Em suma, nestes modelos a variável de estado é toda a curva de taxas de juro.

Nos modelos de equilíbrio para a EPTJ com uma única variável de estado verifica-se, pelo contrário, que a fonte de risco para as variações inesperadas nas taxas de juro corresponde a um único ponto na EPTJ, regra geral a taxa de juro instantânea r_t . Esta diferença fundamental não invalida, contudo, que para continuar a avaliar a importância desse risco, e nos casos em que é possível derivar soluções analíticas²⁶⁶ para $P(t, T, r_t)$, possamos definir novos indicadores de risco. Estas novas medidas, designadas neste contexto por *durações estocásticas*, fornecem agora um indicador da sensibilidade do preço de uma obrigação com respeito à taxa de juro instantânea.

(²⁶⁵) Uma das principais críticas apontadas ao modelo de Vasicek refere-se ao reduzido número de configurações para a EPTJ por este permitidas, uma limitação que torna a sua implementação prática algo difícil. Para mais detalhes sobre este aspecto veja-se Vasicek (*op. cit.*, pp. 186).

(²⁶⁶) Nos casos em que não é possível encontrar uma solução analítica a determinação do preço da obrigação (e da respectiva medida de duração estocástica) pode ser feita com recurso a *métodos numéricos* (árvores binomiais ou trinomiais, e método das diferenças finitas) ou de *simulação*.

A maioria das medidas de duração estocástica tem, no entanto, uma natureza distinta das medidas de duração imunizante. Como enfatizam Brennan e Schwartz (1983), embora preservem a condição de medidas do risco de taxa de juro, as medidas de duração estocástica obtidas a partir de modelos de equilíbrio não mantêm, ao contrário do que acontece por exemplo para as durações de Macaulay e Fisher e Weil, a condição de índice das características temporais das obrigações. Assim, Cox *et al.* (1979, pp. 56) definem a duração estocástica de uma obrigação clássica como sendo «*the maturity of a discount bond with the same risk*», onde o termo risco se refere a $1/B(dB/dr)$.²⁶⁷ Ou seja, a duração é definida como o número, D_{CIR} , que resolve a seguinte equação:

$$\frac{dP(r_t, t, D_{CIR})}{dr_t} \frac{1}{P(r_t, t, D_{CIR})} = \frac{1}{B(r_t, t, T)} \frac{dB(r_t, t, T)}{dr_t} \quad (8.18)$$

Como salienta Fonseca (1999), esta alteração implica que a formulação da estratégia de imunização usando medidas de duração estocástica não pode mais repousar na concepção de Fisher e Weil, ou seja, no ajustamento da duração da carteira ao HTI. Em alternativa, autores como Boyle (1978) defendem que a estratégia de imunização deve assentar na concepção clássica de Redington o que, nas palavras de Nelson e Schaefer (1983, pp. 62), significa que: «*The problem of immunization is precisely the problem of asset replication which is central to much of the modern theory of contingent claims valuation*». Posto isto, a duração estocástica de Vasicek para uma obrigação de cupão zero, $D_{Vas}(t, T)$, é dada por:

$$D_{Vas}(t, T) = -\frac{dP(t, T, r_t)}{dr_t} \frac{1}{P(t, T, r_t)} = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}) \quad (8.19)$$

⁽²⁶⁷⁾ Os autores sugerem uma correcção à medida de duração estocástica obtida para obrigações clássicas por forma a devolver a esta a condição de medida das características temporais do título. O ajustamento consiste em ponderar a duração estocástica da obrigação clássica usando a duração estocástica de uma obrigação de cupão zero com uma determinada maturidade.

Em relação às obrigações clássicas, relembramos que o seu valor no momento t , $B(t, T_n, r_t)$, pode ser decomposto numa carteira de n (o número de cupões por liquidar) obrigações de cupão zero, pelo que o valor de D_{Vas} é calculado segundo:²⁶⁸

$$D_{Vas} = \frac{1}{B(t, T_n, r_t)} \sum_{i=1}^n c_i \cdot P(t, T_i, r_t) \left[\frac{1}{a} (1 - e^{-ar}) \right] \quad (8.20)$$

onde $\tau = T_i - t$, $P(t, T_i, r_t)$ representa o factor de desconto para a maturidade T_i , calculado a partir de (8.17), e as demais variáveis têm o significado habitual.²⁶⁹

As condições de imunização de uma carteira no contexto dos modelos de equilíbrio de Vasicek e CIR para a EPTJ são examinadas, em primeira mão, por Boyle (1978). Usando um raciocínio de arbitragem similar ao apresentado no **Anexo 4**, o autor demonstra que, no caso particular²⁷⁰ em que o valor actual dos activos (A) é igual ao valor actual dos passivos (L), e passo a citar (*op. cit.*, pp. 25), «*To achieve immunization under the stochastic models the mean term (duração) of assets has to be made equal to the mean term of the liabilities as in Redington's theory*», ou seja, $D_{Vas}^A(t, T) = D_{Vas}^L(t, T)$.²⁷¹

(²⁶⁸) O cálculo da duração para uma carteira beneficia da propriedade aditiva enunciada no ponto 4.1.4.

(²⁶⁹) Referência final para o facto de, conforme se verifica pela equação (8.19), a duração estocástica de uma obrigação de cupão zero não ser igual à sua maturidade. Acresce que, ao contrário do que acontece para a duração de Macaulay, a duração de Vasicek para uma obrigação de cupão zero com maturidade infinita é agora limitada por:

$$\lim_{(T-t) \rightarrow \infty} D_{Vas}(t, T) = \frac{1}{a}$$

(²⁷⁰) T'zeng *et al.* (2000) generalizaram recentemente o trabalho de Boyle considerando, (i) que as taxas de retorno dos activos, r_A , e dos passivos, r_L , evoluem segundo processos estocásticos de Vasicek distintos, (ii) que a situação líquida da empresa, $S_u = A - L$, é positiva. Os autores admitem que um choque sobre $r(t)$ exerce efeitos diferenciados sobre r_A e sobre r_L , e demonstram que S_u é imune face a variações em $r(t)$ se a seguinte condição for respeitada:

$$D_{Vas}^A = \left(\frac{L}{A} \right) \times D_{Vas}^L, \text{ onde } D_{Vas}^A = D_{Vas} \times \frac{dr_A}{dr} \text{ e } D_{Vas}^L = D_{Vas} \times \frac{dr_L}{dr}$$

(²⁷¹) O autor sublinha ainda que a carteira imunizante deve ser reajustada continuamente por forma a acomodar choques sobre as taxas de juro e sobre a estrutura do passivo.

Para além das limitações já apontadas, o modelo de Vasicek é criticado por dois aspectos.²⁷² Em primeiro lugar pelo facto de gerar a EPTJ como um *output*, em detrimento de aceitar a actual EPTJ como *input*. Deste modo, apesar das condições de equilíbrio garantirem que os preços gerados pelo modelo não permitem a realização de operações de arbitragem, o modelo não é livre de arbitragem na medida em que estes preços podem não ser consistentes com os actuais valores de mercado. A segunda crítica prende-se com a hipótese de que a volatilidade é constante no tempo.

8.1.2.3. Modelo de Cox, Ingersoll e Ross

Cox, Ingersoll e Ross (1985) (CIR) desenvolvem um modelo de equilíbrio geral onde a EPTJ, a sua dinâmica, e a forma do preço de mercado do risco são determinados endogenamente como parte do equilíbrio. Neste modelo, variáveis como as expectativas, a aversão ao risco, as alternativas de investimento e as preferências dos consumidores relativamente ao momento de efectuar o consumo assumem um papel preponderante na determinação do preço das obrigações. O modelo de CIR relaciona a variabilidade da taxa de juro com o seu próprio nível permitindo, deste modo, que a volatilidade exiba um comportamento heterocedástico. O processo estocástico seguido pela taxa de juro de curto prazo é dado por:

$$dr_t = a(\Theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad (8.21)$$

⁽²⁷²⁾ O modelo foi, ainda assim, alvo de algumas extensões. Hull e White (1990a;1993a) aumentam a parametrização do modelo por forma a torná-lo consistente com os valores de mercado para as variáveis EPTJ e estrutura de volatilidade. Jamshidian (1989) desenvolve um procedimento de avaliação de opções (do tipo europeu) sobre obrigações clássicas, facilmente adaptado aos modelos de Merton, Vasicek e Cox *et al.* (1985). Hull e White (1990b) sugerem um método numérico para avaliar opções do tipo americano empregando uma árvore trinomial. Chen (1992) desenvolve fórmulas para a avaliação, quer de contratos de futuros, quer de opções europeias sobre contratos de futuros que incidem sobre obrigações de cupão zero.

O modelo incorpora igualmente o fenómeno de reversão à média. O termo $\sqrt{r_t}$ elimina a faculdade de ocorrerem taxas de juro negativas, e implica que nos períodos em que as taxas de juro são mais altas (baixas) a volatilidade seja mais elevada (reduzida). Efectuando as necessárias substituições, a expressão analítica para o preço de uma obrigação de cupão zero é agora dada por:

$$P(t, T, r) = A(t, T) e^{-G(t, T)r} \quad (8.22)$$

onde:

$$A(t, T) = \left\{ \frac{2\phi e^{[(a+\lambda+\phi)\tau]/2}}{(\phi+a+\lambda)(e^{\phi\tau}-1)+2\phi} \right\}^{2a\Theta/\sigma^2}$$

$$G(t, T) = \frac{2(e^{\phi\tau}-1)}{(\phi+a+\lambda)(e^{\phi\tau}-1)+2\phi}$$

$$\phi = \left[(a+\lambda)^2 + 2\sigma^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \tau = T - t$$

A EPTJ é obtida a partir de (8.22) fazendo $r(t, T) = [rG(t, T) - \ln A(t, T)]/(T - t)$. As medidas de *duração estocástica* derivadas do modelo de CIR para uma *obrigação de cupão zero* e para uma *obrigação clássica* são definidas, respectivamente, por:²⁷³

$$D_{CIR}(t, T) = G(t, T) = \frac{2(e^{\phi\tau}-1)}{(\phi+a+\lambda)(e^{\phi\tau}-1)+2\phi} \quad (8.23)$$

e por:

$$D_{CIR} = \frac{1}{B(t, T_n, r_t)} \sum_{i=1}^n c_i \cdot P(t, T_i, r_t) \left[\frac{2(e^{\phi\tau}-1)}{(\phi+a+\lambda)(e^{\phi\tau}-1)+2\phi} \right] \quad (8.24)$$

(²⁷³) Conforme se constata pela equação (8.23), a duração estocástica resultante do modelo de CIR para uma obrigação de cupão zero difere do seu tempo até à maturidade e não pode, por isso, ser considerada uma medida das características temporais da obrigação. Ainda assim, a solução avançada por Cox *et al.* (1979) para devolver à medida de risco esta propriedade pode, também aqui, ser usada. Acresce que a duração da obrigação é agora limitada por:

$$\lim_{(T-t) \rightarrow \infty} D(t, T)_{CIR} = \frac{2}{(\phi+a+\lambda)}$$

O modelo de CIR é, à semelhança do modelo de Vasicek, incapaz de ajustar perfeitamente a actual EPTJ. Em consequência, embora internamente livres de arbitragem os seus preços não serão consistentes com a eliminação de oportunidades de arbitragem usando as cotações observadas no mercado.²⁷⁴

8.1.2.4. Reformulação de Wu Para as Durações Estocásticas de Vasicek e CIR

Wu (2000) propôs recentemente uma alteração às medidas de duração estocástica resultantes dos modelos de Vasicek e CIR, no sentido de melhorar o desempenho das estratégias de imunização neles fundadas.²⁷⁵ A modificação sugerida consiste em usar como *proxy* para a verdadeira fonte de risco, não a taxa de juro instantânea, mas uma taxa de juro que esteja directamente relacionada com a maturidade da cada obrigação.

Em termos mais precisos, para cada obrigação o factor de risco relevante corresponde à taxa de juro *spot* cujo prazo é proporcional (na proporção w , $0 \leq w \leq 1$)²⁷⁶ ao tempo que resta para a sua maturidade $\tau = T_n - t$. Formalmente, a taxa para o prazo $w\tau$, $r(t, w\tau)$, é calculada através de $r(t, w\tau) = -\ln P(t, w\tau, r)/w\tau$, onde $P(t, w\tau, r)$ é dado pelas equações (8.17) ou (8.22) consoante nos estejamos a referir, por esta ordem, ao modelo de Vasicek ou ao modelo de CIR.

⁽²⁷⁴⁾ Hull e White (1990a;1993a) sugerem modificações ao modelo por forma a tornar os preços obtidos consistentes com a actual EPTJ. Para uma síntese de outras aplicações ver ainda Strickland (1996b).

⁽²⁷⁵⁾ Conforme relatámos no capítulo 4, a generalidade dos testes empíricos realizados com base em medidas de duração estocástica revelou-se incapaz de demonstrar superioridade destas medidas com relação à tradicional duração de Macaulay. Segundo Wu (2000), a razão para esta má performance prende-se, em primeiro lugar, com o facto da hipótese subjacente a todos os modelos unifactoriais (correlação perfeita entre todas as taxas) não se verificar na prática e, em segundo, com a circunstância dos pressupostos assumidos pelos modelos de Vasicek e CIR se traduzirem em taxas de juro quase constantes no segmento longo da EPTJ.

⁽²⁷⁶⁾ Wu (2000) testou valores para w no intervalo $[0;0,1]$. Se fixarmos w ao nível 0,05, por exemplo, a taxa de juro de referência para uma obrigação com prazo de 10 anos corresponde à taxa *spot* a 6 meses ($w\tau = 0,05 \times 10 = 0,5$). Fazendo $w = 0$ obtêm-se, obviamente, as medidas de duração originais.

Introduzindo esta alteração nas definições (8.20) e (8.24), prova-se que a versão de Wu para as durações estocásticas de Vasicek [D_{Vas}^{Wu}] e CIR [D_{CIR}^{Wu}] é dada por:

$$D_{Vas}^{Wu} = \frac{1}{B(t, T_n, r_t)} \sum_{i=1}^n c_i \cdot P(t, T_i, r_t) \left[\frac{1}{a} (1 - e^{-a\tau}) \times \frac{a(w\tau)}{1 - e^{-a(w\tau)}} \right] \quad (8.25)$$

e por:

$$D_{CIR}^{Wu} = \frac{1}{B(t, T_n, r_t)} \sum_{i=1}^n c_i \cdot P(t, T_i, r_t) \left[\frac{2(e^{\phi\tau} - 1)}{(\phi + a + \lambda)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \times \frac{w\tau}{G(t, w\tau)} \right] \quad (8.26)$$

onde a função $G(t, w\tau)$ é definida por (8.22).²⁷⁷ As equações (8.25) e (8.26) permitem-nos verificar que as versões modificadas de D_{Vas} e D_{CIR} são derivadas a partir das definições originais, corrigindo a sensibilidade da obrigação por um factor (superior à unidade) que é específico para cada obrigação (mais propriamente para cada maturidade). Este ajustamento exerce um efeito de alavanca sobre a medida de risco, que será tanto mais acentuado quanto mais longa for a maturidade do título.

8.2. Modelos de Arbitragem com Base em Múltiplas Variáveis de Estado

Os modelos unifactoriais não são suficientemente realistas do ponto de vista empírico²⁷⁸, uma vez que assumem que a EPTJ pode ser explicada pela dinâmica de uma única variável de estado. Um número significativo de estudos empíricos

(²⁷⁷) Para determinar a duração da carteira Wu recorre ao tradicional expediente de calcular uma média ponderada das durações das obrigações que a compõem. Esta solução, eminentemente prática, não respeita contudo os pressupostos assumidos para o seu modelo. De facto, aquilo que se esperaria era que para calcular a duração da carteira fossem seguidas, por esta ordem, as seguintes etapas: (i) agregação dos cash flows de todas as posições, (ii) definição de uma única taxa de referência para a carteira, (iii) aplicação da fórmula de duração respectiva. Ao optar por esta solução, Wu acaba por calcular uma média ponderada da sensibilidade de cada posição face à respectiva taxa de referência. Para preservar a natureza unifactorial dos modelos originais, o autor impõe então a hipótese *ad hoc* de que as taxas de juro para os diferentes prazos oscilam todas no mesmo sentido e com a mesma variabilidade, uma hipótese já nossa conhecida porque analisada no capítulo 4.

(²⁷⁸) Veja-se Canabarro (1995).

demonstrou, usando a ACP, que a dinâmica da EPTJ é dominada, grosso modo, por três fontes de incerteza: choques sobre o nível de taxas de juro, alterações na inclinação da EPTJ e modificações na sua curvatura.

No contexto da modelização do risco de taxa de juro, os modelos de equilíbrio para a EPTJ com mais do que uma variável de estado (factor) constituíram, assim, uma tentativa de estabelecer uma correspondência directa entre os diferentes tipos de choques a que a EPTJ está sujeita e os factores utilizados nos modelos. O quadro 8.2 sintetiza, por ordem cronológica, as características (em termos de variáveis de estado e processo estocástico) de alguns dos mais populares modelos multifactor.²⁷⁹

8.2.1. Modelo de Brennan e Schwartz

Brennan e Schwartz (1979;1983) desenvolvem um modelo em que as variáveis de estado são uma taxa de curto prazo, r , e uma taxa de longo prazo, l , correlacionadas de forma imperfeita.²⁸⁰ O modelo evidencia alguma dificuldade em ajustar correctamente o segmento intermédio da EPTJ, uma vez que considera com pontos de referência os seus extremos. Em contrapartida, e como frisa Vetzal (1994), a escolha da taxa de juro de longo prazo como segunda variável de estado apresenta a vantagem de permitir o uso da TRA observada no mercado para obrigações perpétuas para eliminar o risco (e respectivo preço de mercado) a ela associado.

⁽²⁷⁹⁾ Note-se que apresentamos apenas modelos onde foi possível extrair medidas de risco de taxa de juro (durações) e/ou para os quais foram realizados estudos de imunização. Para uma lista mais extensa ver, por exemplo, Vetzal (1994) e Ho (1995).

⁽²⁸⁰⁾ A intuição económica subjacente é a de que o valor actual da taxa de juro de longo prazo contém informação sobre os movimentos esperados da taxa de juro de curto prazo.

Quadro 8.2: Modelos de Equilíbrio Multifactor para a EPTJ

Autor(es)	Variáveis de Estado e Processo Estocástico
Brennan e Schwartz (1979)	<p>Taxa de juro de curto prazo:</p> $dr(t) = [a_1 + b_1(l(t) - r(t))]dt + r(t)\sigma_1 dW_1(t)$ <p>Taxa de juro de longo prazo</p> $dl(t) = l(t)[a_2 + b_2r(t) + c_2l(t)]dt + l(t)\sigma_2 dW_2(t)$
Nelson e Schaefer (1983)	<p>Taxa de juro de longo prazo:</p> $dl(t) = \mu_1 dt + \sigma_1 dW_1(t)$ <p>Spread entre as taxas de juro de curto e longo prazo:</p> $ds(t) = \alpha(\beta - s(t))dt + \sigma_2 dW_2(t)$
Schaefer e Schwartz (1984)	<p>Taxa de juro de longo prazo:</p> $dl(t) = \beta_2(s(t), l(t), t)dt + \sigma l(t)^{1/2} dW_2(t)$ <p>Spread entre as taxas de juro de curto e longo prazo:</p> $ds(t) = m(\mu - s(t))dt + \gamma dW_1(t)$
Fong e Vasicek (1991)	<p>Taxa de juro de curto prazo:</p> $dr(t) = a[\Theta - r(t)]dt + \sqrt{v(t)} dW_1(t)$ <p>Volatilidade da taxa de juro de curto prazo:</p> $dv(t) = \gamma(\bar{v} - v(t))dt + \xi\sqrt{v(t)} dW_2(t)$
Longstaff e Schwartz (1992a)	<p>Dois factores não especificados X e Y:</p> $du = (a + bu)dt + c\sqrt{u} dW_u(t) \quad , \quad u = X, Y$
Kraus e Smith (1993)	<p>Taxa de juro de curto prazo:</p> $dr(t) = \mu dt + \sigma dW_1(t)$ <p>Média da taxa de juro de curto prazo:</p> $d\mu(t) = m dt + s dW_2(t)$ <p>Spread ($dm - d(\sigma^2)$):</p> $d\alpha(t) = dm - d(\sigma^2) = b dt + v dW_3(t)$
Balduzzi <i>et al.</i> (1996)	<p>Taxa de juro de curto prazo:</p> $dr(t) = a[\Theta(t) - r(t)]dt + \sqrt{v(t)} dW_1(t)$ <p>Média da taxa de juro de curto prazo:</p> $d\Theta(t) = \alpha(\bar{\Theta} - \Theta(t))dt + \zeta dW_2(t)$ <p>Volatilidade da taxa de juro de curto prazo:</p> $dv(t) = \mu(\bar{v} - v(t))dt + \eta\sqrt{v(t)} dW_3(t)$
Chen (1996)	<p>Taxa de juro de curto prazo:</p> $dr(t) = a[\Theta(t) - r(t)]dt + \sqrt{v(t)}\sqrt{r(t)} dW_1(t)$ <p>Média da taxa de juro de curto prazo:</p> $d\Theta(t) = \alpha(\bar{\Theta} - \Theta(t))dt + \zeta\sqrt{\Theta(t)} dW_2(t)$ <p>Volatilidade da taxa de juro de curto prazo:</p> $dv(t) = \mu(\bar{v} - v(t))dt + \eta\sqrt{v(t)} dW_3(t)$

O modelo de Brennan e Schwartz não admite solução analítica para a equação diferencial fundamental que determina a EPTJ, implicando por isso a necessidade de recorrer a métodos numéricos ou de simulação. Como tal, não é possível dar às durações estocásticas associadas a cada uma das variáveis de estado uma representação analítica semelhante à obtida em (8.20), por exemplo, para o modelo de Vasicek. Neste sentido, os autores defendem que o risco atribuído a r e l deve ser aferido pelo seu contributo para a matriz de variâncias e covariâncias dos retornos da carteira.

8.2.2. Modelo de Nelson e Schaefer

Nelson e Schaefer (1983) propõem um modelo multifactor estimando, empiricamente, as sensibilidades das taxas *spot* com respeito a um conjunto de K factores obtendo, para cada um deles, uma medida de duração η . Estes autores testam um modelo semelhante ao de Brennan e Schwartz, com a diferença de que a taxa de juro de curto prazo é substituída pelo *spread* entre as taxas de juro de curto e longo prazo ($s = l - r$).

8.2.3. Modelo de Schaefer e Schwartz

Schaefer e Schwartz (1984) propõem um modelo onde as fontes de incerteza são novamente l e $s = l - r$, mas redefinem as variáveis por forma a obter uma solução analítica para o preço de uma obrigação. Esta redefinição é baseada em evidência empírica que suporta a ortogonalidade (correlação nula) das duas variáveis de estado. A aproximação analítica derivada consiste no produto de duas expressões que correspondem, grosso modo, às soluções apresentadas em (8.17) e (8.22) para os modelos de Vasicek (1977) e CIR (1985), respectivamente.

Num artigo relativamente recente, Dybvig *et al.* (1996) demonstram que «*in frictionless markets having no arbitrage, the asymptotic zero-coupon rate never falls*».²⁸¹ Esta conclusão põe a descoberto a inconsistência de modelos como os de Brennan e Schwartz (1979), Nelson e Schaefer (1983), e Schaefer e Schwartz (1984), nos quais se admite a possibilidade da taxa de juro de longo prazo ser decrescente.

8.2.4. Modelo de Fong e Vasicek

Fong e Vasicek (1991) apresentam um modelo onde a taxa de juro de curto prazo, r , e a variância das suas variações, v , assumem o papel de variáveis de estado. O tratamento da volatilidade como variável estocástica, uma exigência ditada pela evidência empírica, desempenha um papel central na avaliação de derivados de taxa de juro (e.g., opções) e na formulação de estratégias de cobertura. Os processos estocásticos que caracterizam a evolução dos dois factores são dados por:

$$\begin{aligned} dr(t) &= a[\Theta - r(t)]dt + \sqrt{v(t)} dW_1(t) \\ dv(t) &= \gamma(\bar{v} - v(t))dt + \xi\sqrt{v(t)} dW_2(t) \end{aligned} \quad (8.27)$$

onde Θ e \bar{v} representam as médias de longo prazo para a taxa de juro de curto prazo e para a sua volatilidade, respectivamente. As componentes aleatórias estão correlacionadas pelo coeficiente ρ segundo $dW_1 dW_2 = \rho dt$. Da resolução da equação fundamental resulta a seguinte expressão para o preço de uma obrigação de cupão zero:

$$P(t, T, r_t, v) = \exp[-rD(t, T) + vF(t, T) + G(t, T)] \quad (8.28)$$

⁽²⁸¹⁾ Dybvig *et al.* (*op. cit.*, pp. 1). A intuição económica por detrás deste resultado importante reside, segundo os autores, na natureza crescentemente convexa da relação entre o preço de obrigações com maturidade elevada e a sua respectiva TRA. Para uma demonstração formal desta conclusão recomenda-se a leitura do artigo original.

onde $D(t,T) = (1 - e^{-a(T-t)})/a$, i.e., define a já familiar medida de *duração estocástica de Vasicek*.²⁸² A principal crítica apontada ao modelo prende-se, no entender de Strickland (1996a), com a especificação de $dr(t)$ em (8.27) que, uma vez mais, possibilita a ocorrência de taxas de juro negativas, com a agravante de que tal é agora mais provável na medida em que se admite um comportamento estocástico para a volatilidade.

8.2.5. Modelo de Longstaff e Schwartz

Longstaff e Schwartz (1992a) propõem um *modelo de equilíbrio geral* para a avaliação de derivados de taxa de juro, usando uma versão com duas variáveis de estado do modelo de CIR (1985). Os dois factores efectivamente considerados são a taxa de juro de curto prazo, $r = \alpha x + \beta y$, e a variância das suas variações, $v = \alpha^2 x + \beta^2 y$. As variáveis de estado x e y evoluem segundo processos estocásticos independentes:

$$\begin{aligned} dx(t) &= (\gamma - \delta x)dt + \sqrt{x} dW_1(t) \\ dy(t) &= (\eta - \theta y)dt + \sqrt{y} dW_2(t) \end{aligned} \quad (8.29)$$

onde γ , δ , η e θ são parâmetros. A solução analítica para $P(\tau, r, v)$ é dada por:

$$P(\tau, r, v) = A^{2\gamma}(t, T) B^{2\eta}(t, T) \exp[\kappa(T-t) + rC(t, T) + vD(t, T)] \quad (8.30)$$

onde κ , $A(t, T)$, $B(t, T)$, $C(t, T)$ e $D(t, T)$ são funções dos parâmetros que caracterizam os processos estocásticos definidos em (8.29).²⁸³ As funções $C(t, T)$ e $D(t, T)$ traduzem medidas dos riscos de taxa de juro e de volatilidade, respectivamente.

⁽²⁸²⁾ A função $F(t, T)$ traduz uma medida de exposição à volatilidade. $F(t, T)$ e $G(t, T)$ têm soluções fechadas algo complexas, pelo que se remete para o artigo original. Num artigo recente, Selby e Strickland (1995) propuseram um método mais eficiente para avaliar estas funções, o que torna a implementação do modelo de Fong e Vasicek mais simples.

⁽²⁸³⁾ Para mais detalhes sobre as expressões de κ , $A(t, T)$, $B(t, T)$, $C(t, T)$ e $D(t, T)$, e sobre a implementação do modelo ver Longstaff e Schwartz (1992a; 1992b; 1993) e Strickland (1996; 1996a).

O modelo admite uma grande variedade de configurações para a EPTJ, encaixando facilmente os principais tipos de choques de taxa de juro. A implementação do modelo implica, todavia, a estimação de um elevado número de parâmetros.

8.2.6. Modelo de Kraus e Smith

Kraus e Smith (1993) descrevem um modelo com três factores: a taxa de juro de curto prazo, r , a sua taxa de variação esperada, μ , e um terceiro factor correspondente à diferença entre a tendência de μ e variação na volatilidade de r . A sua dinâmica é definida por três processos estocásticos com termos aleatórios independentes:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \mu dt + \sigma dW_1(t) \\ d\mu(t) &= m dt + s dW_2(t) \\ d\alpha(t) &= dm - d(\sigma^2) = b dt + v dW_3(t) \end{aligned} \quad (8.31)$$

onde s , m , b e v são parâmetros constantes. Os autores admitem que a solução da equação diferencial fundamental para a TRA, $r(r, \mu, \alpha, t, T)$, pode ser representada por uma função polinomial. Nesse caso, a solução analítica para $P(t, T, r, \mu, \alpha)$ é dada por:

$$\begin{aligned} P(t, T, r, \mu, \alpha) = \exp \left[-r(T-t) - \frac{1}{2}(\mu + \lambda_r)(T-t)^2 - \frac{1}{6}(m + \lambda_\mu - \sigma^2)(T-t)^3 - \right. \\ \left. - \frac{1}{24}(b + \lambda_{\sigma^2})(T-t)^4 + \frac{1}{40}s^2(T-t)^5 + \frac{1}{504}v^2(T-t)^7 \right] \end{aligned} \quad (8.32)$$

onde os parâmetros λ simbolizam os preços de mercado para o risco dos três factores.

O modelo adapta-se facilmente à prossecução de estratégias de imunização, uma vez que é compatível com os três tipos de choques de taxa de juro predominantes.²⁸⁴

⁽²⁸⁴⁾ A estratégia de imunização implica o ajustamento das três definições de duração (que resultam da 1ª derivada de $P(t, T)$ com respeito a r , μ e α) aos valores do instrumento alvo. Demonstra-se facilmente que estas três medidas de risco têm uma interpretação semelhante aquela que foi apresentada no capítulo 7 para os três primeiros elementos do vector de duração. O modelo permite ainda o cálculo de três definições de convexidade, cada uma delas correspondendo à respectiva 2ª derivada parcial.

8.2.7. Modelo de Chen e Modelo de Balduzzi, Das, Foresi e Sundaram

Reflectindo sobre os resultados obtidos nos estudos empíricos conduzidos por Chan *et al.* (1992), Pearson e Sun (1994), e por um conjunto de autores usando a ACP, Chen (1996) e Balduzzi *et al.* (1996) estendem os trabalhos de Fong e Vasicek (1991) e Longstaff e Schwartz (1992a) adicionando um terceiro factor ao modelo: a média da taxa de juro de curto prazo.

Os ganhos resultantes do crescente realismo destes modelos, postos em destaque pela grande variedade de configurações admitidas para a EPTJ e para a estrutura por prazos de volatilidade, devem no entanto ser ponderados pelos custos de uma complexidade acrescida, que se reflecte, de forma mais visível, na incapacidade de obter soluções fechadas para o preço de obrigações de cupão zero. Balduzzi *et al.* derivam, por exemplo, uma solução semi-fechada do *tipo afim*, dada por:

$$P(t, T, r, v, \Theta) = A(t, T) \exp[-rB(t, T) - \Theta C(t, T) - vD(t, T)] \quad (8.33)$$

onde

$$B(t, T) = (1 - e^{-a(T-t)})/a$$

$$C(t, T) = [(1 - e^{-a(T-t)}) + (a/\alpha) e^{-a(T-t)} (1 - e^{-\alpha(T-t)})]/(\alpha - a)$$

mas onde $A(t, T)$ e $D(t, T)$ são calculados pela resolução numérica de um sistema de duas equações diferenciais. Ainda assim é possível constatar que, de forma surpreendente, a função $B(t, T)$ traduz de novo a *duração estocástica de Vasicek* apresentada em (8.19).

9. Modelos de Não Arbitragem para a Estrutura por Prazos das Taxas de Juro



O principal inconveniente dos modelos de equilíbrio diz respeito à sua incapacidade de reflectir, de forma adequada e automática, a estrutura de taxas observada em cada momento nos mercados. Nestes modelos a EPTJ é, não um *input*, mas um *output*. Os *modelos de não arbitragem* são desenhados, pelo contrário, de modo a que a dinâmica de toda a EPTJ seja imediatamente consistente com dados de mercado para as taxas de juro e, nalguns casos, para a sua estrutura por prazos de volatilidade.

Em termos genéricos, duas técnicas têm sido usadas para assegurar esta consistência. A primeira, presente por exemplo nos modelos de Ho e Lee (1986), Hull e White (1990a) e Black, Derman e Toy (1990), consiste em aumentar os graus de liberdade do processo estocástico seguido pela taxa de juro de curto prazo admitindo, nomeadamente, que os parâmetros são função do tempo. A segunda, adoptada de forma mais visível no modelo de Heath, Jarrow e Morton (1990;1992) (HJM), começa por considerar um vector de variáveis de estado compreendendo toda a EPTJ, impondo em seguida restrições à tendência do processo estocástico por forma a garantir que o modelo não oferece oportunidades de arbitragem.

9.1. Modelo de Ho e Lee

O desenvolvimento de modelos de não arbitragem tem origem no trabalho pioneiro de Ho e Lee (1986) (HL). Apesar do modelo ter sido apresentado, na versão original, em tempo discreto, e sob a forma duma árvore binomial que relaciona de forma explícita os movimentos futuros dos preços das obrigações de cupão zero com a EPTJ actual,

Dybvig (1989) demonstrou que a versão em tempo contínuo do modelo de HL pode ser definida pelo seguinte processo estocástico para a taxa de juro de curto prazo r :²⁸⁵

$$dr = \Theta(t)dt + \sigma dW(t) \quad \text{onde} \quad \Theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 t \quad (9.1)$$

O parâmetro $\Theta(t)$, que representa a tendência do processo estocástico, é determinado pela inclinação inicial da curva de taxas *forward* e pela volatilidade (constante) de $r(t)$. O seu valor exprime as preferências dos investidores, imbuídas nos preços de mercado das obrigações, $P(t,T)$. É função do tempo por forma a garantir a consistência do modelo com a EPTJ observada. O valor de $P(t,T)$ no momento t (calculado em $t = 0$) é:

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp \left\{ -(T-t)[r(t) - f(0,t)] - \frac{1}{2} \sigma^2 t(T-t)^2 \right\} \quad (9.2)$$

No modelo de HL a estrutura de volatilidade das taxas de juro é descrita por um único parâmetro, $\sigma > 0$, constante. Daqui decorre que todas as taxas ao longo da EPTJ têm a mesma variabilidade ou, o que é o mesmo, todas as possíveis curvas de rendimentos serão, no futuro, paralelas entre si. Conforme demonstra Munk (1999), esta característica é suficiente para que medida de risco de taxa de juro extraída do modelo de HL seja consistente com a convencional medida de *duração aditiva* de Fisher e Weil.²⁸⁶

(²⁸⁵) O modelo de Ho e Lee (1986) pode ser interpretado como o equivalente na avaliação de derivados de taxa de juro ao modelo de Cox, Ross e Rubinstein (1979) para a determinação de preços de opções sobre acções. Pedersen *et al.* (1989) fornecem uma análise detalhada do modelo de HL e sugerem algumas extensões. Bliss e Ronn (1989) desenvolvem um modelo alternativo, assente numa árvore trinomial, depois de constatarem empiricamente que em muitos casos as funções de perturbação indicavam um comportamento estacionário para as taxas de juro.

(²⁸⁶) Refira-se, neste ponto, que a versão original do modelo não explicitava qualquer medida do risco de taxa de juro, subentendendo-se que o cálculo da duração (e da convexidade) exigiria a perturbação de toda a árvore binomial. Só muito recentemente Bierwag (1996) foi capaz de identificar uma medida de *duração implícita* no modelo binomial de HL. As potencialidades oferecidas pelo modelo de HL na avaliação de obrigações, na construção de estratégias de cobertura e na gestão do risco de taxa de juro de activos e passivos são demonstradas empiricamente por McCoy (1995).

O modelo de HL apresenta sérias limitações pelo facto de não incorporar o já referido fenómeno de reversão à média e, como tal, admitir a possibilidade das taxas de juro se tornarem negativas.²⁸⁷ Uma desvantagem adicional do modelo diz respeito à pouca flexibilidade da sua estrutura de volatilidade.

9.2. Modelo de Hull e White

Hull e White (1990a) (HW) sugerem modificações aos modelos de Vasicek (1977) e CIR (1985) por forma a que estes ajustem correctamente a actual EPTJ, a volatilidade futura da taxa de juro de curto prazo e a volatilidade relativa das taxas de juro de curto e longo prazo. As *versões generalizadas* dos modelos de Vasicek e CIR são dadas por:

$$dr = [\Theta(t) - a(t)r] dt + \sigma(t)dW(t) \quad (9.3)$$

$$dr = [\Theta(t) - a(t)r] dt + \sigma(t)\sqrt{r}dW(t) \quad (9.4)$$

onde $\Theta(t)$, $\sigma(t)$ e $a(t)$ são funções do tempo. Reconhecendo a fraca adequação do padrão de volatilidade implícito na equação (9.3) aos valores de mercado, Hull e White (1993a) recomendam o uso de uma *versão especial* onde σ e a são constantes:²⁸⁸

$$dr = [\Theta(t) - ar] dt + \sigma dW(t) \quad (9.5)$$

onde:

$$\Theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + af(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

(²⁸⁷) Ritchken e Boenawan (1990) demonstram que impondo um valor suficientemente grande para o parâmetro δ no modelo original (ou, de forma equivalente, um valor suficientemente pequeno para a volatilidade da taxa de juro de curto prazo), é possível evitar o aparecimento de taxas de juro negativas.

(²⁸⁸) Este modelo, conhecido na literatura por modelo de Hull e White (ou por modelo generalizado de Vasicek), pode ser caracterizado como uma versão do modelo de Vasicek com tendência dependente do tempo, como uma versão do modelo de Ho e Lee em que a taxa de juro de curto prazo incorpora o fenómeno de reversão à média ou, em alternativa, como um caso particular do modelo de HJM.

Tal significa, porém, que o modelo especificado apenas capta a actual EPTJ, sendo a estrutura de volatilidade determinada pelos parâmetros σ e a .²⁸⁹ O preço de uma obrigação de cupão zero derivado a partir do modelo de Hull e White é dado por:²⁹⁰

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ -X(t, T)[r(t) - f(0, t)] - \frac{\sigma^2}{4a} X^2(t, T)(1 - e^{-2at}) \right\} \quad (9.6)$$

onde:

$$X(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (9.7)$$

Munk (1999) prova que a medida de duração estocástica extraída do modelo de Hull e White (identificada pelo termo $X(t, T)$ em (9.7)) é idêntica à duração de Vasicek. Uma diferença fundamental deve no entanto ser realçada. Enquanto que no modelo de HW a duração estocástica é derivada tomando a EPTJ inicial como exógena, no modelo de Vasicek a EPTJ inicial é endógenamente determinada a partir de especificações para a equação de difusão da taxa de curto prazo, e para o preço de mercado do risco.

9.3. Modelo de Heath, Jarrow e Morton

Heath, Jarrow e Morton (1990;1992) (HJM) generalizam o modelo de Ho e Lee (1986) e desenvolvem um modelo multifactor onde usam como variáveis de estado, não a taxa de juro de curto prazo, mas um vector contendo toda a estrutura por prazos de taxas *forward*. O modelo permite ajustar a EPTJ e a sua volatilidade, e assenta em dois

(²⁸⁹) Esta característica revela-se algo restritiva na medida em que implica que, uma vez especificada a estrutura de volatilidade inicial, a sua evolução futura é completamente determinística.

(²⁹⁰) Numa série de artigos, Hull e White (1993a;1994a;1994b;1996) desenvolvem uma representação discreta para o processo estocástico seguido pela taxa de juro usando, em concreto, uma árvore trinomial. O procedimento permite ajustar simultaneamente os dados de mercado para a EPTJ e para a estrutura de volatilidade, e pode ser usado em modelos com duas variáveis de estado.

pressupostos principais: (i) os mercados são completos, (ii) os agentes têm a possibilidade de emprestar e pedir emprestado à mesma taxa de juro. Subentende-se ainda que as preferências dos investidores estão implícitas na EPTJ observada no mercado. A principal inovação do modelo refere-se, porventura, ao facto de este atacar directamente as restrições de arbitragem existentes entre duas obrigações de cupão zero, idênticas excepto no que toca à sua maturidade, e as taxas *forward*.

9.3.1. Especificação do Modelo

A formulação geral do modelo de HJM baseia-se na seguinte equação estocástica:²⁹¹

$$df(t, T) = \mu_f(t, T) + \sum_{i=1}^q v_i(t, T) dW_i(t), \quad 0 < t < T \quad (9.8)$$

onde W_i ($i = 1, \dots, q$) são processos de Wiener independentes, e $f(t, T)$ representa a curva de taxas *forward* observada no momento t para um intervalo de tempo instantâneo a iniciar em T . Os termos $\mu_f(t, T)$ e $v(t, T)$ denotam, respectivamente, parâmetros de tendência e volatilidade. Note-se que a formulação do modelo é perfeitamente genérica, e que a cada escolha (discricionária) da função de volatilidade $v(t, T)$ corresponde uma versão particular do modelo. Os autores demonstram que a eliminação de oportunidades de arbitragem implica a imposição da seguinte restrição à tendência seguida por $df(t, T)$:

$$\mu_f(t, T) = \sum_{i=1}^q \left\{ v_i(t, T) \left[\int_t^T v_i(t, s) ds \right] \right\} \quad (9.9)$$

⁽²⁹¹⁾ Para uma representação equivalente do modelo de HJM tomando como referência o preço de obrigações de cupão zero (e não as taxas *forward*) ver, por exemplo, Rebonato (2000), Hull (2000), e Martellini e Priaulet (2001).

Ou seja, num mundo *risk neutral* a tendência das taxas *forward* depende da sua própria função de volatilidade. Mais, nestas condições a evolução da EPTJ é completamente determinada pelas taxas de juro actuais, $f(0,T)$, e pela estrutura de volatilidade:

$$f(t,T) = f(0,T) + \sum_{i=1}^n \left[\int_0^t v_i(s,T) \left(\int_t^T v_i(t,u) du \right) ds + \int_0^t v_i(s,T) d\tilde{W}_i(s) \right] \quad (9.10)$$

onde os termos \tilde{W}_i representam agora processos de *Wiener* com respeito à medida de probabilidade ajustada pelo risco.²⁹² Na sua formulação original o modelo de HJM é intrinsecamente não *Markoviano*, ou seja, encerra uma trajectória para as taxas de juro que depende da sua própria evolução no tempo. Esta característica coloca problemas à implementação prática do modelo, uma vez que impede a representação do processo estocástico através de uma *árvore recombinante* e exige o recurso a *métodos de simulação*.

Desde a publicação do artigo original que várias tentativas foram feitas para restituir a natureza *Markoviana* ao modelo de HJM, ora impondo restrições à função de volatilidade, ora reduzindo o número de factores no modelo. O quadro 9.1 resume algumas dessas contribuições. Conforme salienta Rebonato (2000), as funções de volatilidade a considerar no modelo de HJM devem exibir um conjunto de características: (i) devem reflectir a certeza de recebimento do valor de reembolso no vencimento da obrigação, o que se consegue impondo $v(t,t) = 0, \forall t$; (ii) devem

⁽²⁹²⁾ A equação de difusão para a taxa de juro de curto prazo, $r(t)$, pode ser obtida a partir de (9.10) como um caso especial notando que $r(t) \equiv \lim_{T \rightarrow t} f(t,T) = f(t,t)$. De forma similar, os preços de obrigação de cupão zero (que pagam uma unidade monetária no vencimento) são obtidos mediante:

$$P(t,T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t,s) ds \right\}$$

assegurar um processo do tipo Markov para as taxas de juro; (iii) devem exibir um comportamento estacionário no tempo.

Quadro 9.1: Especificações de Volatilidade no Modelo de HJM

Autor(es)	$v(t, T)$
Ho-Lee (1986) e HJM (1990)	$v(t, T) \equiv \sigma$, $\sigma > 0$
Hull-White (1993b) e Carverhill (1994)	$v_i(t, T) \equiv \sigma_i \cdot \exp(-a_i(T-t))$, com $\sigma_i, a_i > 0$ ²⁹³
Ritchken e Sankarasubramanian (1995)	$v(t, T) \equiv v(t, t) \exp\left(\int_t^T \kappa(x) dx\right)$, $\kappa(x)$ = função determinística Caso especial: $v(t, T) \equiv \sigma r(t)^\alpha e^{-a(T-t)}$ ²⁹⁴
Inui e Kijima (1998)	$v_i(t, T) \equiv v_i(t, t) \exp\left(\int_t^T \kappa(x) dx\right)$, $\kappa(x)$ = f. determinística, $i = 1, \dots, q$ Caso especial: $v_1(t, T) \equiv \sigma_1 r(t)^\alpha$ e $v_2(t, T) \equiv \sigma_2 r(t)^\alpha e^{-a(T-t)}$
Nawalkha (1999)	$v_i(t, T) \equiv \sigma \cdot \min[k(t), \lambda]$, $\sigma, \lambda > 0$ onde $k(t) = \min(f(t, T)^\alpha, \forall T \geq t)$ e $\alpha > 0$

Hull e White (1993b) e Carverhill (1994) demonstram que a única função de volatilidade que respeita simultaneamente estas condições é dada por $v_i(t, T) \equiv \sigma_i \exp[-a_i(T-t)]$, onde $\sigma_i > 0$ e $a_i \geq 0$.²⁹⁵ Assinale-se, porém, que neste caso o modelo de HJM é virtualmente indistinguível do modelo de Hull e White analisado no ponto 9.2. Acrescente-se que, nestas condições, o modelo preconiza uma distribuição Gaussiana para as taxas de juro *forward*.

(²⁹³) Esta estrutura de volatilidade é conhecida por estrutura generalizada de Vasicek. Se consideramos apenas um factor obtemos o já familiar modelo de Hull White (1990a).

(²⁹⁴) Note-se que impondo $a = 0$ e $\alpha = 0,5$ obtemos a função de volatilidade usada por CIR (1985).

(²⁹⁵) Repare-se que à medida que o valor de a tende para zero, ou seja, na ausência do fenómeno de reversão à média das taxas de juro, a função de volatilidade tende para a versão em tempo contínuo do modelo de Ho e Lee, i.e., $v(t, T) \equiv \sigma$.

9.3.2. Medidas de Risco de Taxa de Juro

Kelly e Thurston (1995) e Munk (1999) desenvolvem um conjunto de medidas de risco de taxa de juro (durações) para o modelo de HJM. Como é sabido, o risco de uma obrigação corresponde à variação proporcional no preço seu preço em resultado de choques não antecipados sobre a EPTJ. No modelo de HJM o risco da obrigação é determinado essencialmente pelo parâmetro de volatilidade das taxas *forward*. Neste cenário, Kelly e Thurston propõem a seguinte definição geral para a duração de uma obrigação clássica no modelo de HJM, D_{HJM} :

$$D_{HJM} = \frac{1}{B(t, T)} \sum_{\tau=1}^n \frac{c_{\tau} \cdot P(t, \tau)}{v(t, t)} \times \left[\int_t^{\tau} v(t, u) du \right] \quad (9.11)$$

Esta definição permite comprovar que a medida de duração depende do cupão da obrigação, da EPTJ observada no mercado, e da função de volatilidade instantânea para as taxas *forward*. Assim, e no seguimento daquilo que referimos anteriormente, a cada especificação de $v(t, T)$ corresponderá agora, não apenas uma versão diferente do modelo de HJM, mas uma medida de risco de taxa de juro distinta. Kelly e Thurston apresentam alguns exemplos, sumariados no quadro que se segue:

Quadro 9.2: Medidas de Duração no Modelo de HJM

Função de Volatilidade	Medida de Duração
$v(t, T) \equiv \sigma$	$D = \frac{1}{B(t, T)} \sum_{\tau=1}^n c_{\tau} \cdot \tau \cdot P(t, \tau)$
$v(t, T) \equiv \sigma \cdot e^{-a(T-t)}$	$D = \frac{1}{B(t, T)} \sum_{\tau=1}^n c_{\tau} \cdot P(t, \tau) \left[\frac{1}{a} (1 - e^{-a\tau}) \right]$
$v(t, T) \equiv \frac{\sigma}{(1+T-t)}$	$D = \frac{1}{B(t, T)} \sum_{\tau=1}^n c_{\tau} \cdot P(t, \tau) \log(1 + \tau_i - t)$
$v(t, T) \equiv \frac{\sigma}{(1+T)}$	$D = \frac{1}{B(t, T)} \sum_{\tau=1}^n c_{\tau} \cdot P(t, \tau) \log\left(\frac{1+\tau_i}{1+t}\right)$

9.3.3. Aplicação do Modelo à Estratégia de Imunização

Para ilustrar as potencialidades da versão unifactorial do modelo de HJM, seguimos Jarrow e Turnbull (1994;1996) e usamos o já mencionado coeficiente de volatilidade de Vasicek na formulação de uma estratégia de imunização para uma obrigação clássica.²⁹⁶ Retomando a equação para $P(t,T)$ avançada em (9.6), observa-se que o valor da obrigação é, em cada momento do tempo t , definido pelo produto de uma *componente não aleatória* (o rácio entre os preços, no momento 0, de duas obrigações com maturidade em T e t), por uma *parcela aleatória*, determinada essencialmente pela variável $k(t) \equiv r(t) - f(0,t)$. Esta variável é comum a todas as obrigações e traduz, simplesmente, os choques não antecipados sobre a EPTJ. Deste modo, para choques discretos (e finitos) em Δt e Δk é possível aproximar a variação no preço da obrigação clássica $B(k,t,T_n) = \sum_{i=1}^n c_i P(k,t,T_i)$ através da seguinte expansão de Taylor:

$$\frac{\Delta B}{B} \cong \frac{1}{B} \frac{dB}{dk} \Delta k + \frac{1}{2B} \frac{d^2 B}{dk^2} (\Delta k)^2 + \frac{1}{B} \frac{dB}{dt} \Delta t + \dots \quad (9.12)$$

onde $\Delta B = B(k_1) - B(k_0)$ e $\Delta k = k_1 - k_0$. Calculando as derivadas parciais e substituindo em (9.12) obtém-se, desprezando o termo *theta*, a seguinte expressão:

$$\Delta B \cong -\bar{X} B \times \Delta k + \frac{1}{2} \bar{X}^2 B \times (\Delta k)^2 \quad (9.13)$$

$$\text{onde } \bar{X} = \sum_{i=1}^n w_i X_i, \quad \bar{X}^2 = \sum_{i=1}^n w_i X_i^2 \quad \text{e} \quad w_i = \frac{c_i P(k,t,T_i)}{B(k,t,T_n)}, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (9.14)$$

e onde $X_i \equiv X(t,T_i)$ é dado pela equação (9.7).

(²⁹⁶) Jarrow e Turnbull (1994;1996) fornecem outras aplicações do modelo de HJM, nomeadamente a contratos de futuros (sobre obrigações de cupão zero e com cupão), a opções (sobre obrigações de cupão zero, sobre obrigações clássicas e sobre futuros), e a *caps, floors* e *swaptions*.

As variáveis \bar{X} e \bar{X}^2 têm, no entender Jarrow e Turnbull (1994), uma interpretação intuitiva. Com efeito, elas encerram versões generalizadas dos conceitos de duração e convexidade estocástica deduzidas, neste caso, num contexto em que o preço das obrigações é determinado por forma a eliminar oportunidades de arbitragem.

Admitamos agora que o investidor deseja proteger o valor da sua carteira $B(k)$ contra choques (de 1ª e 2ª ordem) em $k(t)$, impondo ainda a restrição de autofinanciamento à estratégia. Designemos por η_a , η_b e η_c as quantidades das obrigações a , b e c (com valor de mercado B_a , B_b e B_c , respectivamente) a ser usadas para replicar o comportamento da posição “*alvo*”. Por argumentos enunciados no **Anexo 1**, demonstra-se que a carteira óptima satisfaz o seguinte sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} B_a & B_b & B_c \\ \bar{X}_a B_a & \bar{X}_b B_b & \bar{X}_c B_c \\ \bar{X}_a^2 B_a & \bar{X}_b^2 B_b & \bar{X}_c^2 B_c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \eta_a \\ \eta_b \\ \eta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B \\ -\bar{X}B \\ -\bar{X}^2 B \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

A solução óptima pressupõe, como é normal, a assunção de posições negativas em algumas obrigações que integram a carteira.

9.4. Modelo de Black, Derman e Toy

Para contornar a principal desvantagem dos modelos do tipo Gaussiano, nomeadamente a eventualidade de estes gerarem taxas de juro negativas, Black, Derman e Toy (1990) (BDT) desenvolvem um modelo Markoviano de factor único capaz de ajustar, simultaneamente, a EPTJ e a estrutura de volatilidade observada no mercado. À semelhança da versão original do modelo de HL, BDT caracterizam a evolução de toda

a EPTJ através de uma árvore binomial em tempo discreto. Hull e White (1990a) mostram, contudo, que a versão em tempo contínuo do modelo é dada por:

$$d(\log r) = \left[\Theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \log r \right] dt + \sigma(t) dW \quad (9.16)$$

onde $\sigma'(t)$ representa a derivada parcial de $\sigma(t)$ em ordem a t . O modelo impõe uma distribuição lognormal para as variações nas taxas de juro, eliminando deste modo a possibilidade de ocorrerem taxas de juro negativas. As funções $\Theta(t)$ e $\sigma(t)$ dependem do tempo por forma a ajustar correctamente os dados de taxa de juro e de volatilidade, respectivamente.²⁹⁷

Ho (1995) identifica algumas características indesejáveis no modelo. Desde logo o facto de este não admitir soluções fechadas para o preço (e obviamente para as medidas de risco de taxa de juro), mesmo para os activos mais básicos. Acresce o facto do modelo não aceitar taxas de juro *forward* negativas, uma situação provável num contexto em que a EPTJ exhibe forte inclinação negativa. Por último, para certas especificações de volatilidade em que a taxa de reversão à média é baixa, a taxa de juro pode evidenciar um comportamento incaracterístico de afastamento da média.

⁽²⁹⁷⁾ Este esforço de consistência apresenta, contudo, algumas desvantagens. A principal refere-se, no entender de Carverhill (1995), Hull e White (1995) e Strickland (1996a), à imposição de uma estrutura de volatilidade futura perfeitamente determinística e não estacionária, gerando preços pouco fiáveis, especialmente para opções. Argumentam os autores que tal se deve ao já mencionado problema de sobreparametrização. Esta razão é suficiente para que Hull e White (1993b) recomendem a fixação do parâmetro $\sigma(t) \equiv \sigma$, ajustando apenas a EPTJ. Nesse caso, a equação (9.16) reduz-se a:

$$d(\log r) = \Theta(t)dt + \sigma dW$$

Um processo estocástico que pode ser caracterizado como uma versão lognormal do modelo de HL.

Gagnon e Johnson (1994) estudam as propriedades de imunização dinâmica do modelo de BDT, comparando o seu desempenho (simulado) com o proporcionado por estratégias passivas de maturidade. As estimativas de duração e convexidade em cada nó da árvore binomial são calculadas, no modelo de BDT, usando o procedimento de *backward induction*.²⁹⁸ Os autores concluem, em primeiro lugar, que a estratégia de imunização supera claramente as estratégias passivas, e a que a introdução da convexidade não melhora significativamente o desempenho da carteira.

9.5. Modelo de Black e Karasinski

Black e Karasinski (1991) (BK) propõem uma modificação à versão em tempo contínuo do modelo de BDT, usando três funções dependentes do tempo (tal como no modelo de Hull e White (1990a)). O objectivo é o de tornar o modelo consistente, não apenas com os dados de mercado para ETPJ e volatilidade, mas também para a volatilidade de *caps*. O modelo assenta no seguinte processo estocástico:

$$d(\log r) = [\Theta(t) + a(t) \log r] dt + \sigma(t) dW \quad (9.17)$$

Repare-se que, ao invés do sugerido por BDT, neste modelo o parâmetro de reversão à média é independente da função de volatilidade. O modelo de BK não admite soluções analíticas para o preço dos activos, pelo que os autores desenvolvem um novo procedimento de implementação baseado numa árvore binomial com espaçamento temporal não constante. Este modelo enferma, porém, dos mesmos problemas de sobreparametrização antes apontados ao modelo de BDT.²⁹⁹

⁽²⁹⁸⁾ Para uma ilustração deste procedimento ver, por exemplo, Clewlow e Strickland (1998).

⁽²⁹⁹⁾ Ainda assim, podemos sempre restringir o modelo e admitir que a e σ são constantes, ajustando apenas a EPIJ. Nesse caso, (9.17) dá lugar a:

$$d(\log r) = [\Theta(t) + a \log r] dt + \sigma dW$$

9.6. Modelos de Mercado

Os modelos de não arbitragem (e também os de equilíbrio) envolvem especificações de processos estocásticos para taxas (*spot* ou *forward*) que não são directamente observáveis no mercado. Nestas condições, a implementação prática dos modelos exigirá sempre a definição (mais ou menos arbitrária) de *proxies*.

Brace, Gatarek e Musiela (1997) (BGM) e Jamshidian (1997) introduziram recentemente uma nova categoria de modelos, conhecida por *modelos de mercado*³⁰⁰. A sua principal característica refere-se ao facto de assentarem directamente sobre taxas de juro *forward* implícitas em produtos activamente transaccionados no mercado, designadamente *caps*, *floors*, *swaptions*. A formalização dos modelos pressupõe a definição de novas variáveis – *variáveis de mercado* – correspondendo a taxas de juro de curto prazo implícitas em contratos *forward* ou em contratos de *swap*, para as quais se admite a distribuição lognormal.

O modelo acomoda vários factores e é especialmente recomendado na avaliação de derivados de taxa de juro não standardizados. A sua implementação prática revela-se, todavia, complicada, dado que o modelo não admite soluções analíticas para o preço dos activos. Assim sendo, torna-se necessário recorrer a métodos numéricos e de simulação.

⁽³⁰⁰⁾ Estes modelos são ainda conhecidos por *LIBOR Market Models* ou por *Caps Market Models*. Para uma análise mais detalhada dos modelos remetemos para os artigos originais e para as excelentes sínteses providenciadas por Rebonato (2000), Hull (2000) e Martellini e Priaulet (2001).

IV – Modelos de Risco de Taxa de Juro para Instituições Financeiras

As profundas transformações registadas nas últimas três décadas ao nível das práticas de medição, gestão e controlo do risco de taxa de juro têm, como pano de fundo, um ambiente económico caracterizado por um significativo aumento na volatilidade dos mercados, pela inovação tecnológica, por alterações políticas que acentuaram a desregulamentação e a globalização nos mercados, pelo aumento da importância dos mercados financeiros na canalização de poupanças para o investimento e, não menos importante, pelo desenvolvimento de produtos financeiros cada vez mais complexos. Neste quadro, a avaliação da exposição face aos riscos financeiros ganhou preponderância nas preocupações das empresas em geral, e das instituições financeiras (bancos, companhias de seguros, etc.) em particular.

A gestão de activos e responsabilidades (*Asset Liability Management* (ALM)) assume, nas instituições financeiras, um papel de destaque na protecção face ao risco de taxa de juro. Para além das oscilações que provoca nas rubricas dentro e fora do balanço, o risco de taxa de juro tem implicações significativas em inúmeras variáveis de interesse para este tipo de empresas (resultados financeiros, margem financeira, rácio do capital sobre o activo, volume e composição dos negócios, risco de crédito, etc.).

10. Estratégias de Investimento e Cobertura do Risco de Taxa de Juro para Instituições Financeiras

As estratégias de cobertura do risco de taxa de juro são normalmente repartidas em duas categorias: estratégias activas e estratégias passivas. Hiller e Schaack (1990) defendem, contudo, uma classificação distinta, agrupando as estratégias segundo a

natureza (determinística ou estocástica) do problema e segundo o critério de cobertura adoptado (duração, cash flows, etc.). Nos últimos anos temos assistido ao desenvolvimento de técnicas de medição, gestão e controlo dos riscos cada vez mais sofisticadas. Entre essas metodologias destacamos, pelo avanço que representou, o conceito de *Value at Risk* (VAR). Vejamos uma síntese das suas características.

10.1. Estratégias Passivas de Gestão do Risco de Taxa de Juro

As *estratégias passivas* são formuladas de modo a que, independentemente da evolução das taxas de juro verificada ao longo do HTI, a solvabilidade da instituição financeira seja assegurada, isto é, o valor dos activos seja sempre suficiente para cobrir as responsabilidades. De forma equivalente, as estratégias são estruturadas por forma a que o retorno efectivo do investimento seja, no mínimo, igual ao seu valor esperado. Do conjunto das estratégias passivas sobressaem, pela sua importância, a estratégia de *dedicação* ou de *cash flow matching*, a estratégia de *indexação*, e a estratégia de *imunização*.

10.1.1. Estratégia de Dedicção ou de Cash Flow Matching³⁰¹

A *estratégia de dedicação* ou de *cash flow matching* envolve a estruturação e manutenção de uma carteira de activos por forma a que os seus cash flows repliquem, da forma mais perfeita possível, o conjunto das responsabilidades a que a instituição está obrigada. Na

(301) A terminologia usada para definir esta estratégia é difusa e alterna entre o termo *dedicação* e o termo *cash flow matching*. Apenas Maloney e Logue (1989) ensaiam uma diferenciação, com base no argumento de que a estratégia de dedicação relaxa a hipótese de que o perfil temporal dos cash flows activos deve ser exactamente igual ao perfil temporal dos cash flows passivos. Neste trabalho usaremos ambos os termos indistintamente.

sua formulação base³⁰², a estratégia de dedicação impõe um perfil temporal idêntico (não apenas no presente mas em todos os momentos futuros) para as estruturas dos cash flows activos e passivos. Existindo mais do que uma carteira que satisfaz estas condições a instituição seleccionará, obviamente, aquela que apresenta um custo de aquisição menor, usando para tal, por exemplo, técnicas de programação matemática.³⁰³

A estratégia de dedicação apresenta um conjunto de atractivos, postos em destaque por Fabozzi (2000), Douglas (1990) e Maloney e Logue (1989): (i) na sua formulação base a estratégia elimina completamente o risco de mercado e o risco de reinvestimento; (ii) a estratégia dispensa quaisquer restrições de duração ou convexidade; (iii) a estratégia base requer reajustamentos pouco frequentes na composição da carteira, que se limitam aqueles que são necessários para substituir um activo que se extingue, ou que deixa de verificar os requisitos necessários (por exemplo em termos de risco de crédito).

A estratégia de dedicação revela, todavia, algumas limitações: (i) custos de implementação elevados, que podem levar a que esta seja preterida, por exemplo, em

(³⁰²) Por razões que se prendem, por exemplo, com a inexistência de obrigações em número suficiente e para todas as maturidades desejadas, a estratégia de dedicação perfeita não é exequível. Na prática, a maioria das instituições relaxa as hipóteses de base e admite, por um lado, que é necessário um excesso (*surplus*) de fundos inicial relativamente às responsabilidades a cobrir, e por outro que às instituições é facultada a possibilidade, quer de reinvestir os cash flows em excesso para o futuro, quer de pedir emprestado caso os fundos disponíveis num determinado momento não sejam suficientes para cobrir as responsabilidades. Refira-se, no entanto, que as instituições podem sempre adoptar uma posição conservadora usando taxas de juro muito baixas para o reinvestimento, e taxas muito altas para os empréstimos. Para além destas atenuantes, vários aspectos práticos devem ser considerados aquando da formulação da estratégia, nomeadamente restrições ao nível dos lotes de activos a adquirir, restrições de liquidez, risco de crédito, custos de transacção, fiscalidade dos cupões, periodicidade de reajustamento da carteira, desajustamento entre os momentos em que ocorrem os cash flows activos e passivos, efeitos decorrentes do fim do HTI (para muitas das responsabilidades assumidas pelas instituições financeiras não existe um horizonte temporal específico para o qual se prevê o seu pagamento), exigências de diversificação e objectivos adicionais do investidor (taxa de retorno mínima).

(³⁰³) Algoritmos matemáticos para a resolução do problema de dedicação (e também do problema de imunização) podem ser encontrados em Tilley (1980), Kocherlakota, Rosenbloom e Shiu (1988;1990), Dahl, Meeraus e Zenios (1993), Hiller e Schaack (1990), entre outros.

favor da estratégia de imunização³⁰⁴; (ii) dificuldades (ou impossibilidade) de adopção nos casos em que as responsabilidades são de longo prazo; (iii) a estratégia é puramente determinística, i.e., apenas admite cash flows fixos³⁰⁵; (iv) nos casos em que o *match* não é perfeito a instituição continua a estar exposta aos riscos de mercado e reinvestimento.

10.1.2. Estratégia de Indexação

A *estratégia de indexação* envolve a estruturação da carteira de activos de modo a replicar as características (em termos de risco e retorno) de um índice de referência para o mercado obrigacionista. Pretende-se, deste modo, minimizar os desvios entre o desempenho da carteira e do índice. A implementação da estratégia de indexação obedece a um conjunto de etapas:

- (i) Selecção do índice de referência (*benchmark*);³⁰⁶
- (ii) Identificação dos atributos do índice a replicar;³⁰⁷

⁽³⁰⁴⁾ Como referimos no capítulo 4, Maloney e Logue (1989) argumentam que a consideração dos custos de transacção pode modificar a vantagem comparativa das estratégias de dedicação e imunização.

⁽³⁰⁵⁾ A estratégia de dedicação converte-se num problema de natureza estocástica se admitirmos que os cash flows são incertos. A formulação do problema nestes moldes implica a incorporação de um modelo (de equilíbrio ou de não arbitragem) que descreva o comportamento probabilístico das taxas de juro. A exploração deste tema ultrapassa em muito os objectivos deste trabalho, pelo que remetemos o leitor mais interessado para a boa revisão dos modelos fornecida por Hiller e Schaack (1990).

⁽³⁰⁶⁾ São factores críticos nesta escolha os objectivos do investidor (maximizar o retorno, obter os fundos necessários para satisfazer compromissos futuros, minimizar a volatilidade, etc.), e o seu grau de aversão ao risco.

⁽³⁰⁷⁾ Os índices obrigacionistas integram normalmente um grande número de emissões, tornando bastante difícil (e dispendiosa) a construção de uma carteira que replica integralmente a totalidade das suas características. Por este motivo, na prática os gestores de carteira são forçados a seleccionar uma amostra da composição do índice, amostra essa que deve contudo reproduzir, fielmente, a uma escala menor, o conjunto dos atributos do índice considerados essenciais. Entre os atributos dos índices mais usados na estratégia de indexação encontram-se, segundo Fabozzi (2000) e Galdi (1987), a sua duração, a sua estrutura de maturidade (agrupando os cash flows por segmentos - *maturity buckets*), a estrutura de taxa de cupão e cash flows, e a distribuição das emissões por sector, por risco de crédito, por emitente e por risco de reembolso antecipado (*call risk*).

(iii) Definição da metodologia de implementação.³⁰⁸

A opção pela estratégia de indexação apresenta um conjunto de *vantagens*: (i) o investidor usufrui dos ganhos associados à natureza diversificada da carteira indexante; (ii) os custos de transacção e monitorização são reduzidos; (iii) por último, as carteiras indexadas geram retornos previsíveis de acordo com a evolução esperada do índice, retornos estes que empiricamente tendem a superar os obtidos pelas estratégias activas.

Às vantagens da estratégia de indexação é todavia necessário contrapor alguns *pontos fracos*: (i) dificuldades em encontrar (e replicar eficazmente) um índice que represente adequadamente os objectivos do investidor; (ii) erros de ajustamento na estratégia em consequência do procedimento de amostragem; (iii) a estruturação inicial da carteira e a sua manutenção podem revelar-se extremamente dispendiosas, em especial nos casos em que o número de atributos a replicar é elevado; (iv) a indexação restringe as alternativas de investimento às emissões representadas no índice; (v) por fim, a divisão da EPTJ em segmentos (*buckets*) de maturidade ou duração não reconhece explicitamente a correlação que, regra geral, entre eles se estabelece.

10.1.3. Estratégia de Imunização do Balanço

A estratégia de imunização (apresentada no capítulo 4 e desenvolvida nos capítulos subsequentes) considera, na linha do proposto por Fisher e Weil (1971), que as

⁽³⁰⁸⁾ Fabozzi (2000) identifica, nesta matéria, três técnicas distintas. A primeira, designada por *técnica de estratificação da amostra*, consiste em traços gerais na divisão do índice em células, cada uma delas representando uma característica específica do índice, no interior das quais se escolhe um número reduzido de emissões que represente de forma adequada o atributo em causa. A *metodologia de optimização* adiciona aos contornos da abordagem anterior a necessidade de satisfazer um conjunto de restrições adicionais (limites máximos de exposição, etc.), e a prossecução de um objectivo (maximizar o retorno, a convexidade, etc.). A terceira alternativa, mais complexa e exigente em termos computacionais, consiste na *minimização da variância* dos desvios entre o índice e a carteira indexante, usando os dados históricos.

responsabilidades do investidor se resumem a um único pagamento a realizar numa data futura, que dista do presente por um período correspondente ao HTI. Acresce que, findo o HTI, se supõe que o investidor deseja proceder à liquidação da carteira. A maioria das instituições financeiras é confrontada, contudo, com a necessidade de efectuar um número significativo de pagamentos em datas futuras distintas.

10.1.3.1. Modelo de Imunização de Redington

O modelo de Redington (1952) é inovador na medida em que assume que, para evitar a dispendiosa solução oferecida pela estratégia de dedicação e atingir os objectivos, o activo $A(i)$ e o passivo $L(i)$ de uma instituição financeira devem ser tratados de forma consistente em função de uma mesma TRA, i . À semelhança do exposto para o modelo de Macaulay, admite-se que a EPTJ é horizontal e apenas sofre choques paralelos. Representemos por A_t e L_t os cash flows que a empresa espera receber e pagar, respectivamente, no horizonte temporal $t \in (1, T)$. Designando por $S_u(i) = A(i) - L(i)$ a situação líquida da instituição, o seu valor actual é dado por:

$$S_u(i) = \sum_{t=1}^T A_t e^{-it} - \sum_{t=1}^T L_t e^{-it} \quad (10.1)$$

A instituição encontra-se (localmente) imunizada contra choques sobre a TRA se o impacto sobre S_u for nulo, isto é, se $dS_u(i)/di=0$. Diferenciando a equação (10.1) com respeito a i obtém-se a *primeira condição de imunização* de Redington:³⁰⁹

⁽³⁰⁹⁾ Para sermos mais rigorosos, Redington assume na sua demonstração que $S_u=0$, ou seja, que $A=L$. Nestas condições verificamos facilmente que a 1ª condição de imunização de Redington não é mais do que um caso particular de (10.2), o caso em que $D_A = D_L$. Se à restrição $S_u=0$ juntarmos (como o faz por simplificação Redington) a hipótese de que o passivo se resume a um único pagamento, então é possível tratar L_H como uma obrigação de cupão zero com vencimento no HTI, obtendo de novo a tradicional condição de imunização de Fisher e Weil $D_A = H$. Por último, se admitirmos que o passivo corresponde a um índice obrigacionista obtemos a restrição da *estratégia de indexação* $D_A = D_{index}$.

$$D_A = \left[\frac{L(i)}{A(i)} \right] \times D_L \quad (10.2)$$

onde:

$$D_A = \frac{1}{A(i)} \sum_{t=1}^T t \cdot A_t e^{-it} \quad \text{e} \quad D_L = \frac{1}{L(i)} \sum_{t=1}^T t \cdot L_t e^{-it} \quad (10.3)$$

e onde D_A e D_L denotam as durações (*termos médios*) de Macaulay para o activo e para o passivo, respectivamente. A interpretação desta condição é simples. Citando Redington (*op. cit.*, pp. 290), para que o valor de S_u seja imune ao risco de taxa de juro é necessário que «*the mean term of the value of the asset-proceeds must equal the mean term of the value of the liability-outgo*», multiplicada pelo rácio de cobertura (L/A).³¹⁰ Para assegurar a suficiência das condições de 1ª ordem o autor acrescenta a habitual condição de 2ª ordem para a existência de um mínimo, $d^2 S_u(i)/di^2 > 0$. Efectuando os cálculos apropriados, demonstra-se que a 2ª condição de imunização de Redington é dada por:

$$C_A > \left[\frac{L(i)}{A(i)} \right] \times C_L \quad (10.4)$$

onde:

$$C_A = \frac{1}{A(i)} \sum_{t=1}^T t^2 A_t e^{-it} \quad \text{e} \quad C_L = \frac{1}{L(i)} \sum_{t=1}^T t^2 L_t e^{-it} \quad (10.5)$$

e onde C_A e C_L simbolizam os conceitos de convexidade (versão em capitalização contínua) para o activo e para o passivo, respectivamente. Segundo Redington (*op. cit.* pp. 291), esta condição significa que «*the spread of the value of the asset-proceeds about the mean term should be greater than the spread of the value of the liability-outgo*», ou seja, a maior dispersão (em torno da duração) dos cash flows activos relativamente aos passivos garante que

(³¹⁰) O diferencial $D_A - D_L(L/A)$, designado desde Bierwag e Kaufman (1985) por *Gap de Duração* (para a situação líquida), representa uma medida efectiva do risco de taxa de juro e traduz, quando positivo (negativo), uma postura agressiva da instituição na expectativa de uma descida (subida) das taxas de juro.

em caso algum a situação líquida será negativa.³¹¹ O número de carteiras de activos que satisfaz, simultaneamente, as 1ª e 2ª condições de imunização de Redington é muito grande. Para identificar uma solução adequada, Bierwag *et al.* (1983b) sugerem o primeiro procedimento sistemático de construção de carteiras imunizadoras de múltiplas responsabilidades. A regra prática recomendada pelos autores baseia-se na divisão da carteira de activos em duas³¹² subcarteiras, $A = A_1 + A_2$, de modo a que:

- i) As medidas de duração imunizante (de Macaulay, Fisher e Weil, Bierwag, etc.) do activo sejam iguais às do passivo, i.e., $D_A = D_L$;
- ii) Uma das subcarteiras tenha duração D_{A1} não superior à data de vencimento da 1ª responsabilidade, i.e., $D_{A1} \leq t_1$;
- iii) A outra subcarteira tenha duração não inferior à data de vencimento da última responsabilidade, i.e., $D_{A2} \geq t_T$.

10.1.3.2. Outros Modelos de Imunização do Balanço

O modelo de imunização de Redington assume que a EPTJ é horizontal e que apenas está sujeita a choques paralelos de dimensão reduzida. Nos capítulos anteriores

(³¹¹) A utilização do termo dispersão ganha mais significado se reformularmos a condição (10.4) usando o regime de capitalização discreta (anual) e a definição do conceito de dispersão S avançada em (4.8). A condição de dispersão é então representada por:

$$S_A > S_L + (D_A^2 - D_L^2), \text{ onde } S_A = \sum_{t=1}^T \phi_t \cdot (t - D_A)^2 \text{ e } S_L = \sum_{t=1}^T \phi_t \cdot (t - D_L)^2$$

Bierwag (1979), Fong e Vasicek (1983), Shiu (1990) e Uberti (1997), entre outros, derivam uma condição equivalente a (10.4) usando o conceito de que M^2 . Com efeito, se admitirmos que $D_A = D_L$ e que $A = L$, prova-se que a condição de dispersão passa a ser definida por $M_A^2 > M_L^2$.

(³¹²) Os autores demonstram, contudo, que o procedimento é válido para carteiras particionadas num número arbitrário de subcarteiras. Esta opinião é corroborada por Shiu (1988, pp. 219) no seguinte excerto: «...a sufficient condition for the immunization of multiple liabilities is the existence of a decomposition of the asset cash flows in such a way that each liability is separately immunized by one of the component asset cash flow streams». Idênticas conclusões são obtidas por Barber (1999) no contexto de choques de taxa de juro representados por uma função do tipo afim. Dahl *et al.* (1993) fornecem alguns procedimentos de programação matemática necessários à implementação da estratégia de imunização.

provámos que o relaxamento das hipóteses base permitia acomodar, não apenas outras definições sobre a forma como a EPTJ se desloca, mas também outros modelos para a dinâmica das taxas de juro. Redesenhadas as medidas de risco de taxa de juro (durações), demonstrámos contudo que o conceito de imunização permanecia válido.

O modelo de imunização de Redington atribuía à manutenção (ou ao aumento) do valor de mercado do capital da instituição um papel primordial. Na prática, gestores, accionistas e entidades reguladoras prestam especial atenção à evolução de indicadores como o resultado líquido (I), a rendibilidade do capital (I/S_u), a rendibilidade do activo (I/A), ou à proporção do activo financiada por capitais próprios (S_u/A).

Bierwag e Kaufman (1985) desenvolvem um conjunto de medidas de duração (*Duration Gaps*, D^{Gap}), que sintetizam a exposição de cada um destes indicadores ao risco de taxa de juro. O quadro 10.1 resume essas medidas:

Quadro 10.1: Medidas de Risco de Taxa de Juro para Instituições Financeiras ³¹³

Indicador	Medida de Duração
Situação Líquida	$DGap_{S_u} = D_A - (L/A) D_L$
Rácio S_u/A	$DGap_{S_u/A} = D_A - D_L$
Resultado Líquido	$DGap_I = -\frac{S_u}{I} + \frac{r_A}{1+r_A} \frac{A}{I} D_A - \frac{r_L}{1+r_L} \frac{L}{I} D_L$
Rendibilidade do Capital	$DGap_{I/A} = DGap_I - D_A/(1+r_A)$

Notas: r_A e r_L representam as taxas de retorno do activo e do passivo, respectivamente.

⁽³¹³⁾ Para mais detalhes sobre a dedução destas medidas de risco ver Bierwag e Kaufman (1985) e Bierwag (1987).

10.2. Estratégias Activas de Gestão do Risco de Taxa de Juro

Para um investidor que revela expectativas sobre a evolução das taxas de juro contrárias à opinião predominante no mercado, a prossecução de uma estratégia de imunização elimina a possibilidade de realizar ganhos superiores ao retorno esperado e não pode, por isso, ser considerada uma estratégia óptima. As *estratégias activas* envolvem a construção de carteiras com duração diferente da duração do passivo (ou, no caso particular, do HTI), explorando os ganhos potenciais que decorrem da antecipação de determinados movimentos para as taxas de juro.³¹⁴

10.2.1. Estratégia de Antecipação de Movimentos de Taxa de Juro

A *estratégia de antecipação de movimentos de taxa de juro* procura maximizar o capital da instituição, ajustando a duração do activo por forma a tirar partido de determinadas expectativas sobre a evolução das taxas de juro, $E(\Delta i)$.³¹⁵ Babcock (1984) demonstrou que o *trade-off* entre risco e retorno numa estratégia activa pode ser representado por

⁽³¹⁴⁾ Segundo Douglas (1990), podem ainda considerar-se estratégias activas aquelas que prosseguem objectivos mais ambiciosos (em termos de retorno, por exemplo) controlando contudo, de forma rigorosa, o risco da carteira.

⁽³¹⁵⁾ Um exemplo simples permite entender melhor o funcionamento desta estratégia. Considere-se uma situação em que os investidores esperam a manutenção dos actuais níveis de taxas de juro no futuro, ou seja, uma situação em que a EPTJ é horizontal. Admitamos ainda, por simplificação, que $A = L$. Suponhamos agora que um determinado investidor antecipa uma descida (subida) generalizada do nível de taxas de juro (deslocamento paralelo da EPTJ). Para tirar proveito desta expectativa e usufruir de um retorno efectivo (R_{ef}) superior ao retorno “prometido” pela estratégia de imunização, R_H , o investidor deve construir uma carteira de activos com duração superior (inferior) à duração do passivo. Em termos formais:

$$\text{Para } A = L, \text{ se: } \begin{cases} E(\Delta i) < 0 \\ E(\Delta i) = 0 \\ E(\Delta i) > 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} D_A > D_L \\ D_A = D_L \\ D_A < D_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{ef} > R_H & \vee & \Delta S_u > 0 \\ R_{ef} = R_H & \vee & \Delta S_u = 0 \\ R_{ef} < R_H & \vee & \Delta S_u < 0 \end{cases}$$

Na eventualidade das expectativas se revelarem incorrectas as conclusões serão, naturalmente, opostas.

uma relação linear, em que a medida de risco corresponde ao desvio da duração da carteira face ao HTI. Conclui-se, assim, que a estratégia de antecipação de movimentos de taxa de juro será tanto mais activa quanto maior for o *Gap de duração*. Na implementação desta estratégia devem ser tidas em conta algumas das suas limitações:

- (i) o sucesso da estratégia depende, em larga escala, da perspicácia demonstrada na previsão das taxas de juro; (ii) em cenários de elevada volatilidade a frequência de reajustamentos necessária pode anular os potenciais ganhos em termos de retorno.

10.2.2. Estratégia de Maximização do Retorno com Risco Controlado

Segundo Douglas (1990) esta estratégia caracteriza-se, em traços gerais, por procurar atingir determinados objectivos em termos de retorno (mensuráveis pelo retorno total, pela TRA ou pela taxa de juro corrente), sem no entanto descuidar o nível de risco (normalmente medido pela duração) de taxa de juro da carteira. O controlo do risco é conseguido ajustando a duração da carteira a um determinado referencial de mercado, tipicamente um índice obrigacionista.

Para maximizar o retorno da carteira o gestor pode: (i) aumentar a exposição a activos e segmentos de mercado considerados subavaliados, (ii) apostar em variações nos *spreads* entre sectores (induzidos por alterações no risco de crédito do emitente, por cláusulas de reembolso antecipado, etc.) e segmentos da EPTJ, (iii) incrementar a proporção de obrigações com taxa de cupão elevada (para aumentar a taxa de juro corrente).³¹⁶

⁽³¹⁶⁾ O principal atractivo desta estratégia situa-se, no entender do autor, na circunstância de ela permitir a gestão estratégica de outros riscos financeiros (risco de crédito, risco sectorial, etc.), ao mesmo tempo que se acompanha criteriosamente o risco de taxa de juro. Os seus principais problemas prendem-se, para além daquele que se refere aos custos de transacção e monitorização, com escolhas erradas em termos de títulos e sectores a investir e com a possibilidade de os objectivos serem alterados.

10.2.3. Estratégia de Imunização Contingente

A *estratégia de imunização contingente*, atribuída a Leibowitz e Weinberger (1982;1983), apresenta uma natureza híbrida na medida em que combina elementos de estratégia activa com características da clássica estratégia de imunização. O objectivo é o de superar o retorno alcançável pela estratégia de imunização, ao mesmo tempo que se limitam as perdas decorrentes de previsões erradas sobre as oscilações nas taxas de juro.

Em termos operacionais, o investidor começa por fixar um limite mínimo (um suporte) para aquilo que seria uma taxa de retorno aceitável para o investimento, R_{\min} , taxa essa que deve ser inferior à rendibilidade da estratégia de imunização, i.e., $R_{\min} < R_H$. O diferencial $R_{\min} - R_H$ representa a *margem de segurança* da estratégia, e traduz a perda máxima (face a R_H) que o investidor está disposto a aceitar.³¹⁷ O seu valor é determinado pelo grau de aversão ao risco do investidor. Em seguida, o investidor prossegue uma política de investimento activa, escolhendo carteiras com duração superior ou inferior ao HTI, consoante as suas expectativas sobre as taxas de juro.

Se as previsões do investidor se revelarem, à *posteriori*, sistematicamente bem sucedidas, o retorno obtido pela carteira será naturalmente superior ao da estratégia de imunização. No caso das projecções se revelarem na direcção errada, o investidor mantém uma estratégia activa enquanto o valor da carteira se situar acima do patamar que é indispensável para garantir a rendibilidade mínima do investimento, alternando imediatamente para uma estratégia de imunização quando esse valor é atingido.

(³¹⁷) Bierwag (1987) compara a estratégia de imunização contingente à conhecida estratégia de *stop-loss* no mercado accionista.

Percebe-se assim, de forma clara, a denominação da estratégia. A adopção da estratégia de imunização é *contingente* (é detonada) à experimentação de perdas na carteira de montante igual à margem de segurança definida pelo próprio investidor. Uma vez activada, a estratégia é irreversível se considerarmos a margem de segurança inicial.³¹⁸

A estratégia de imunização contingente satisfaz de forma adequada as pretensões de um investidor que aceita algum risco em troco de uma rendibilidade mais elevada. Enfrenta, não obstante, a quase totalidade dos problemas antes referidos para a estratégia de imunização, bem assim como as limitações que decorrem da estratégia de antecipação, em concreto a habilidade do gestor para identificar os movimentos das taxas de juro.³¹⁹

10.2.4. Estratégia de Duration Targeting

A estratégia de imunização clássica garante a obtenção de um determinado retorno para o investimento mas não assegura a minimização da variabilidade dos retornos da carteira durante o HTI. Este aspecto preocupa muitos gestores de carteira que se

(³¹⁸) Os autores fazem ainda referência ao modo como a detonação da estratégia de imunização deve ser feita, e defendem a existência de um *alerta de detonação*. Com efeito, existem factores que impedem que o *timing* de detonação da estratégia coincida com o momento exacto em que margem de segurança é anulada, e que justificam o ajustamento da duração da carteira ao valor pressuposto pelo mecanismo de imunização antes de alcançada a rendibilidade mínima. Entre eles encontram-se os custos de transacção que resultam da reestruturação da carteira, o grau de liquidez dos títulos, bem assim como a verificação de períodos de elevada volatilidade onde qualquer movimento adverso pode ser suficiente para situar a rendibilidade da carteira abaixo do nível mínimo, antes mesmo de a sua recomposição ser possível. Por estas razões, os autores sugerem a definição de uma *margem de detonação* em torno das taxas de detonação que, quando atingida, fornece um alerta que desencadeia o mecanismo de imunização. Recomendam ainda que, no caso das taxas de juro evoluírem numa direcção que provoque a erosão da margem de segurança, o ajustamento para a estratégia de imunização se faça de forma gradual, com reestruturações que conduzam à progressiva aproximação da duração da carteira ao tempo remanescente do HTI.

(³¹⁹) Uma última referência para o facto da margem de manobra para a prossecução de estratégias activas se ir estreitando à medida que o período remanescente do HTI vai diminuindo. Efectivamente, a redução do HTI limita a dimensão dos choques de taxa de juro admissíveis pela estratégia, na medida em reduz o tempo disponível para que os efeitos preço e reinvestimento se compensem em resultado de qualquer alteração nas taxas de juro.

mostram interessados em aferir o desempenho do investimento não apenas pelo seu resultado final, mas também pelo seu comportamento ao longo do HTI. Reconhecendo este facto, Langetieg *et al.* (1990) propõem uma *estratégia de imunização parcial*, assente na fixação de um objectivo (*target*) para a duração. Retomando as hipóteses base do modelo de Redington, os autores demonstram que carteira de variância mínima deve exibir, em cada momento, uma duração igual a metade do HTI, i.e., $D_P = 1/2 \times HTI$.

Apesar de não erradicar por completo a incerteza em torno do valor final do investimento, ou seja, de não permitir a imunização total, a estratégia de *duration targeting* apresenta como trunfos principais uma significativa redução na volatilidade durante e no final do HTI, e o facto de, ao contrário da estratégia de imunização, não se extinguir uma vez findo o HTI.³²⁰

10.2.5. Estratégia de Imunização Dinâmica

A *estratégia de imunização dinâmica* (EID), apresentada por Choie (1990), assume contornos muito semelhantes aos da estratégia de imunização contingente. Com efeito, o seu principal objectivo continua a ser o de tirar proveito de movimentos favoráveis nas taxas de juro, salvaguardando a obtenção de um retorno mínimo quando as circunstâncias de mercado se mostram adversas. O patamar mínimo de rendibilidade é fixado exactamente nos mesmos moldes antes enunciados no ponto 10.2.3.

(³²⁰) A estratégia de *duration targeting* é perfeitamente compatível com a generalidade das estratégias (activas e passivas) já analisadas, ora replicando o comportamento de um índice obrigacionista, ora incorporando práticas activas de gestão monitorizando, designadamente, outras características das emissões (risco de crédito, distribuição sectorial, etc.). O gestor de carteira pode ainda administrar de forma activa as suas previsões de taxa de juro, fixando bandas de flutuação para a duração da carteira em torno do objectivo.

As principais diferenças face à estratégia de imunização contingente situam-se: (i) no facto do investidor aplicar à partida um montante superior àquele que seria necessário para concretiza a imunização, constituindo deste modo uma reserva³²¹ (em valor) de segurança, RS ; (ii) ao nível da fixação de uma duração para a carteira que não atende exclusivamente às previsões de taxa de juro, mas que é feita de modo a que o pior cenário admissível para as taxas de juro não invalide a possibilidade do retorno usufruído pela estratégia ser igual ao retorno mínimo, isto é claro, detonando uma estratégia de imunização.³²²

Em termos formais, o cálculo da duração definida pela EID é feito com recurso a uma aproximação quadrática, usando como medida do risco de taxa de juro a duração modificada de Macaulay. A duração D_{ID} deve então respeitar a seguinte equação:

$$RS = B_P \left[-\frac{D_{ID}}{(1+i)} di + \frac{1}{2} \frac{D_{ID}(D_{ID}+1)}{(1+i)^2} (di)^2 \right] \quad (10.6)$$

10.2.6. Técnica de Seguro da Carteira

Desenvolvida por Leland e Rubinstein (1981), a técnica de seguro da carteira (TSC) (*portfolio insurance*) procura replicar as características (em termos de risco e retorno) de uma carteira protegida por uma opção de venda combinando, nas proporções

(³²¹) O autor utiliza o termo *cushion* para designar este diferencial. Dada a sua natureza pensamos que o termo reserva (ou margem) de segurança antes enunciado continua definir de forma adequada o conceito.

(³²²) É óbvio que se o movimento for positivo os ganhos da estratégia serão maximizados. É como se o investidor apostasse no “*tudo ou nada*” para a reserva de segurança. O gestor da carteira deve ainda monitorizar regularmente o nível de duração implícito na estratégia, que varia naturalmente em consequência dos movimentos nas taxas de juro, reajustando o seu valor sempre que este se afaste consideravelmente de D_{ID} . Segundo o autor, este procedimento configura um mecanismo de detonação automática dos reajustamentos.

adequadas, um activo sem risco e uma acção (ou obrigação, se estivermos no contexto de estratégias de investimento obrigacionista). Para conseguir este resultado, a estratégia confia numa propriedade bem conhecida dos contratos de opções - *paridade put-call* -, segundo a qual o perfil de ganhos e perdas de uma posição no activo subjacente protegida por uma opção de venda é equivalente a uma posição composta pelo activo sem risco adicionado de uma opção de compra.³²³

A TSC é uma estratégia dinâmica na medida em que cada movimento no activo subjacente implica reajustamentos no rácio de cobertura entre as posições com e sem risco. Constitui uma alternativa válida na protecção do investimento nos casos em que não existem, por exemplo, contratos de opção transaccionados que satisfaçam as pretensões do investidor. A estratégia permite proteger qualquer activo (ou conjunto de activos), para qualquer preço de exercício ou data de vencimento.³²⁴

10.2.7. Estratégia de Duração Total e Efeito Diversificação

A forma encontrada por muitos gestores de carteira para prosseguir objectivos mais ambiciosos em termos de retorno e, ao mesmo tempo, usufruir dos potenciais benefícios da diversificação, passa pela inclusão de acções e outras classes de activos na carteira. Desde os trabalhos de Markowitz que sabemos que a inclusão de activos

(³²³) Por outras palavras, uma carteira constituída por uma posição longa numa opção de compra (C) e por uma posição curta numa opção de venda (P) (emitidas sobre o mesmo activo subjacente (S), com o mesmo preço de exercício (E) e vencimento (T)), gera o mesmo retorno que uma posição longa no activo subjacente acompanhada de uma posição curta em *cash* ($Ee^{-r(T-t)}$), i.e., $C - P = S - Ee^{-r(T-t)}$. Manipulando ligeiramente a equação temos então as duas alternativas de protecção: $P + S = C + Ee^{-r(T-t)}$.

(³²⁴) Fong e Tang (1988) e Fonseca (1998) ilustram a aplicação da TSC na gestão de carteiras obrigacionistas, este último baseando-se no modelo de Vasicek (1977) para obter o preço de opções sobre obrigações.

correlacionados (especialmente de forma negativa) numa carteira permite reduzir o seu risco sem sacrificar a rendibilidade. O princípio da diversificação encontra paralelo na velha máxima “*não se deve colocar todos os ovos no mesmo cesto*”.

Leibowitz (1986;1987) avança com algumas pistas para a gestão do risco de taxa de juro nestas circunstâncias. Em primeiro lugar o autor preconiza a definição de uma medida de duração para o conjunto da carteira – *duração total*.³²⁵ Para tal avança com uma abordagem puramente estatística assente em estimativas de variância para os retornos das acções, σ_{Equity} , e das obrigações, σ_{Bonds} , e para a correlação entre ambos, $\rho(E, B)$.

A estimativa de duração para o mercado accionista, D_{Equity} , é obtida mediante:

$$D_{Equity} = \left(\frac{\sigma_{Equity}}{\sigma_{Bonds}} \right) \rho(E, B) D_{Index} \quad (10.7)$$

onde D_{Index} representa a duração de um índice de referência para o mercado obrigacionista. A generalização desta noção ao um contexto em que temos carteiras de acções implica o uso da seguinte definição de *duração total*, D_{TP} :

$$D_{TP} = w_B D_{Index} + w_E \beta_E D_{Equity} \quad (10.8)$$

onde β_E denota o *beta* da carteira, e onde os parâmetros w_j , $j \in [B, E]$, representam as proporções investidas em obrigações e acções, respectivamente. O coeficiente beta exerce uma espécie de efeito de alavanca sobre o risco total da carteira. Em resumo, numa carteira composta simultaneamente por acções e obrigações são elementos chave no nível de exposição ao risco de taxa de juro a volatilidade das classes de activos consideradas individualmente, o nível de correlação entre elas, e o coeficiente beta.

(³²⁵) Não existe consenso sobre a melhor forma de calcular a duração de uma acção (ou de um índice). Sobre esta matéria as várias soluções propostas inserem-se, regra geral, no domínio dos tradicionais *modelos de dividendos descontados*, e ignoram os efeitos induzidos pelas alterações de taxa de juro nos cash flows gerados pelo título. Para um exemplo ver Leibowitz *et al.* (1989).

10.3. Metodologia Value at Risk

Alertadas pelo colapso financeiro de algumas empresas³²⁶, as entidades reguladoras³²⁷ e indústria financeira³²⁸ sentiram nos últimos necessidade de desenvolver métodos de medição e controlo dos riscos de mercado cada vez mais sofisticados. Entre essas metodologias sobressai um conceito chave: *Value at Risk* (VAR).

10.3.1. Value at Risk (VAR): Definição e Importância do Conceito

*«Value at Risk (VAR) is a measure of the maximum potential change in value of a portfolio of financial instruments over a pre-set horizon. VAR answers the question: how much can I lose with α % probability over a given time horizon».*³²⁹

Em termos formais, o VAR define-se como o limite inferior para o seguinte intervalo de confiança unilateral:

$$\text{Prob}[\Delta P(\tau, \Delta S) \leq -\text{VAR}] = 1 - \alpha \quad (10.9)$$

(³²⁶) Entre os exemplos mais mediáticos contam-se as falências do *Banco Barings* e do fundo de investimento norte-americano *Orange County*, bem como as perdas milionárias registadas pela subsidiária norte-americana da *Mettalgesellschaft*, pelo *Banco Daiwa* e pelo *Grupo Sumitomo*.

(³²⁷) Em Julho de 1993 o *Group of Thirty* (1993) propõe, pela primeira vez, a uso do VAR no seu estudo sobre as práticas correntes na utilização de instrumentos derivados. A Directiva Comunitária de Adequação de Capitais EEC 6-93, acordada em 1993 e introduzida no início de 1996, veio estabelecer os requisitos mínimos de capital para as instituições financeiras no espaço da União. Esta regulamentação representou um avanço significativo relativamente ao “Acordo de Basileia” (concluído em Julho de 1988 pelo grupo G-10) na medida em que não limitava o seu âmbito aos riscos de crédito e considerava os riscos de mercado. Em 1995, uma proposta do Comité de Supervisão e Regulamentação Bancária de Basileia (ou simplesmente Comité de Basileia (CB, 1995)) defende, pela primeira vez, que os bancos podem usar as estimativas do VAR obtidas com base em modelos internos para o cálculo dos requisitos de capital. Em Janeiro de 1996 o CB (1996) publica uma adenda ao acordo de 1988 onde ficam instituídas duas abordagens alternativas no cálculo dos requisitos de capital: uma abordagem *standard* e uma abordagem com base em *modelos internos*. Em Agosto de 1996 as entidades reguladoras para o mercado norte-americano transpõem para a sua legislação a adenda proposta pelo CB.

(³²⁸) A metodologia VAR foi rapidamente adoptada pela indústria financeira. O sistema de cálculo do VAR mais conhecido foi proposto pela corretora JP Morgan em Outubro de 1994, e tomou a designação de RiskMetrics.

(³²⁹) JP Morgan (1996, pp.6).

onde α representa o nível de confiança desejado, e $\Delta P(\tau, \Delta S)$ denota a variação no valor da carteira, expressa em termos de uma função do horizonte temporal [$\tau = T - t$] e do vector de alterações nos factores de risco subjacente [ΔS].³³⁰ Como se verifica, a estatística VAR envolve, desde logo, dois parâmetros escolhidos arbitrariamente: o *horizonte temporal* para o qual desejamos obter estimativas para as perdas da carteira, e o *nível de confiança*. O horizonte temporal é definido essencialmente em função da liquidez dos activos e da periodicidade de reajustamento da carteira.³³¹ O nível de confiança deve ser escolhido por forma a que o valor do VAR raramente seja excedido.³³²

A atractividade do conceito VAR decorre, em grande medida, das suas próprias características: (i) o VAR fornece um indicador comum (em termos monetários) para os riscos individuais e globais da carteira; (ii) o VAR constitui um instrumento de autocontrolo para as instituições, na medida em que traduz o montante da perda não coberta que a empresa está disposta a aceitar (Shimko (1997)); (iii) a medida permite

(³³⁰) Registe-se neste ponto que, como refere Jorion (1997), o VAR pode ser medido, quer em termos *absolutos* (valor numérico absoluto da perda), quer em termos *relativos*, sendo que neste último caso a perda é calculada por comparação com a rentabilidade esperada da carteira.

(³³¹) A juntar a estes factores, Dowd (1998) salienta que outros argumentos podem condicionar a opção, por exemplo, por um horizonte temporal curto: a validação da hipótese de normalidade para os retornos dos factores de risco, a necessidade de acomodar alterações na própria carteira e o destinatário da estimativa obtida. Refira-se ainda que a escolha do horizonte temporal tem implicações importantes, não apenas na qualidade da estimativa do VAR, mas também ao nível dos requisitos de capital, e isto porque se assume implicitamente que a composição da carteira permanece inalterada durante esse período. Saliente-se a propósito que o Comité de Basileia recomenda a utilização de um horizonte temporal de 10 dias de negociação. Os impactos produzidos pelo horizonte temporal nas estimativas do VAR foram analisados por Beder (1995). A autora simulou o cálculo do VAR para três carteiras hipotéticas, aplicando quatro métodos de cálculo distintos e considerando horizontes temporais de 1 e 10 dias. À excepção de um único caso, Beder conclui que a estimativa do VAR é tanto maior quanto maior for o horizonte temporal.

(³³²) Kupiec (1995) e Dowd (1998) fazem notar que outros elementos devem ser considerados aquando da escolha do nível de confiança, designadamente as suas implicações em termos de requisitos de capital, em termos de validação do próprio sistema de cálculo, e para efeitos contabilísticos e de comparação entre diferentes entidades. O Comité de Basileia recomenda o uso de um nível de confiança de 99% para as estimativas que servem de base ao cálculo dos requisitos de capital.

comparar directamente o risco de activos financeiros distintos³³³; (iv) a metodologia VAR pode ser facilmente generalizada a outros tipos de risco (risco de crédito, risco de liquidez, risco de cash flow, risco operacional, risco legal, etc.), e constituir uma alternativa flexível aos tradicionais indicadores nesta matéria: o desvio-padrão da rentabilidade ou o parâmetro beta (no caso das acções), a duração e a convexidade (no caso das obrigações), a volatilidade (no caso das divisas), etc.

10.3.2. Métodos de Cálculo do Value at Risk

Da definição apresentada em (10.9) resulta claro que as estimativas do VAR são obtidas a partir da distribuição de probabilidades para os retornos da carteira, isto é:

$$1 - \alpha = F_{\Delta P}(-VAR) = \int_{-\infty}^{-VAR} f_{\Delta P}(u) du \quad (10.10)$$

onde $F_{\Delta P}(u) = \text{Prob}(\Delta P \leq u)$ e $f_{\Delta P}(u)$ denotam, respectivamente, as funções de distribuição acumulada (*f.d.a.*) e de densidade de probabilidade (*f.d.p.*) dos retornos da carteira ΔP . Os principais métodos de cálculo do VAR diferem, entre si, essencialmente pela forma como aproximam a verdadeira distribuição de ΔP , e são normalmente agrupados em quatro grandes categorias: *métodos paramétricos* (analíticos, ou de variâncias-covariâncias), *métodos de simulação histórica* (ou não paramétricos), *métodos de simulação de Monte Carlo* (ou de simulação estocástica) e *métodos de análise de cenários* (ou *stress-tests*).

(³³³) É de salientar que este atributo é especialmente importante para os gestores das instituições, que assim podem usar o indicador para definir limites de risco para as posições a tomar, para determinar o risco de oportunidades de investimento, de cobertura ou de especulação, ou ainda para avaliar a performance (e atribuir a correspondente remuneração) de determinadas unidades de negócio (ou inclusive de *traders*). É também relevante para as entidades reguladoras que, deste modo, dispõem de um referencial de controlo para o apuramento dos requisitos mínimos de capital.

10.3.2.1. Métodos Paramétricos

Os *métodos paramétricos* envolvem hipóteses sobre a forma como os retornos dos factores de risco subjacente se distribuem, e implicam o cálculo do risco directamente a partir da volatilidade, da matriz de correlações, e de outros parâmetros que caracterizam a distribuição de probabilidades. Sobre esta matéria a hipótese mais comum é a de que os retornos seguem uma distribuição normal³³⁴, caracterizada por dois únicos parâmetros: a média, μ , e o desvio padrão, σ . A principal consequência (e vantagem) desta hipótese é a de que o problema de calcular o VAR se resume, para qualquer nível de confiança desejado, à determinação de um múltiplo do desvio padrão.³³⁵

Admitindo, por agora, que a carteira é constituída por um único activo (que por sua vez depende de um único factor de risco, por exemplo a TRA), e que o retorno esperado é nulo ($\mu = 0$)³³⁶, a estimativa do VAR é obtida através da seguinte expressão:

$$VAR = -P_0 \times z_{1-\alpha} \times \sigma \sqrt{T} \quad (10.11)$$

onde P_0 representa o valor inicial da carteira, $z_{1-\alpha}$ simboliza o $(1-\alpha)$ ésimo percentil da distribuição normal estandardizada, σ indica o desvio padrão (diário) do factor de risco subjacente, e T denota o horizonte temporal (medido em anos) para o qual se pretende

(³³⁴) Veja-se, por exemplo, JP Morgan (1996), Fallon (1996), Hopper (1996), Jorion (1997), Duffie e Pan (1997), Jackson *et al.* (1997) e Dowd (1998).

(³³⁵) A assunção de normalidade apresenta ainda um conjunto significativo de vantagens, em especial no que toca à simplificação dos cálculos, à possibilidade de construir intervalos de confiança para o VAR, à facilidade de transladar o valor do VAR entre diferentes níveis de confiança e horizontes temporais, e à facilidade com que se avalia o impacto resultante da inclusão de uma nova posição na carteira. Sobre este último tema ver, por exemplo, Garman (1996;1997).

(³³⁶) Segundo Wilmott (1998), esta opção é perfeitamente admissível para horizontes temporais curtos. Para períodos mais longos o autor recomenda o cálculo do VAR usando a seguinte expressão: $VAR = -P_0(\mu T - z_{1-\alpha} \times \sigma \sqrt{T})$. Jackson *et al.* (1997) analisam os efeitos provocados pela inclusão da média no cálculo do VAR mas não obtém resultados conclusivos.

obter uma estimativa do VAR.³³⁷ Nos casos em que a carteira é composta por múltiplos activos, o cálculo do VAR deve observar duas *etapas*: (i) determinação da exposição individual de cada posição aos diferentes factores de risco, e sua arrumação por categorias de risco; (ii) apuramento, por agregação, do risco global da carteira, tomando em consideração os efeitos de diversificação que advém da inclusão das correlações.

Em termos formais, considere-se uma carteira formada por J activos nas proporções $w = [w_1, \dots, w_J]$. Designando por Σ a matriz de variâncias e covariâncias dos factores de risco, a variância da carteira é agora dada por $\sigma_P = w \cdot \Sigma \cdot w^T$. Como, por definição, uma combinação linear de variáveis conjuntamente normalmente distribuídas é, também ela, uma variável normalmente distribuída, o *VAR da carteira* é dado por:

$$VAR = -P_0 \times z_{1-\alpha} \times (w \cdot \Sigma \cdot w^T)^{1/2} \times \sqrt{T} \quad (10.12)$$

Em resumo, a estimação do VAR nos modelos paramétricos mais simples implica apenas o cálculo da matriz Σ .³³⁸

(³³⁷) A multiplicação do desvio padrão diário pelo factor \sqrt{T} , como forma de aproximar a volatilidade para o horizonte temporal desejado, deve ser feita com especiais cautelas. Com efeito, e tal como salientam Iacono e Skeie (1996), a aproximação apenas é exacta se: (i) os factores de risco forem normalmente distribuídos e tiverem média nula, (ii) a matriz de variâncias e covariâncias for constante, por forma a garantir que os retornos são independentes e identicamente distribuídos, e (iii) a carteira não incluir posições não lineares (por exemplo opções).

(³³⁸) A metodologia VAR é compatível com as várias soluções existentes para obter uma estimativa de Σ . O método mais simples, implícito nos denominados *Modelos de Volatilidade Constante*, consiste em admitir que as variâncias e as covariâncias não variam no tempo e que podem, na respectiva *janela de estimação*, ser aproximadas pelas respectivas contrapartidas amostrais. A aplicação deste método revela-se, no entanto, contrária à evidência empírica, uma vez que negligencia a natureza estocástica e persistente da volatilidade (Duffie e Pan (1997)). Acresce que este método ignora a ordem natural das observações atribuindo peso idêntico aos dados mais recentes e mais distantes. Para ultrapassar estas incongruências, os *Modelos de Volatilidade Ponderada* (dos quais se destaca o modelo de *médias móveis de ponderação exponencial* usado pelo sistema RiskMetrics) tomam em consideração a variabilidade no tempo de Σ e acentuam o peso dado às observações mais recentes. Autores como Cumby *et al.* (1993) e Duffie e Pan (1997) preferem a utilização de estimativas de *volatilidade condicional* obtidas pelos modelos ARCH, GARCH e sucedâneos, uma vez que estes acomodam, de forma mais flexível, os fenómenos de variabilidade e persistência da volatilidade. As estimativas de *volatilidade implícita* constituem uma última alternativa.

Os métodos paramétricos apresentados até ao momento baseiam-se na assunção de linearidade entre o valor da carteira e os factores de risco subjacente. Tal como sublinha Holton (1996), esta característica simplifica fortemente o cálculo do VAR uma vez que preserva, não apenas a relação de proporcionalidade entre a volatilidade da carteira e a volatilidade dos factores de risco, mas também as relações de correlação. O problema surge quando a carteira inclui posições não lineares nos respectivos factores de risco.

De facto, quando tal acontece a aplicação do método convencional produz resultados manifestamente insatisfatórios. A justificação é simples: para posições não lineares nos factores de risco a assunção de normalidade para a distribuição dos retornos não é suficiente para preservar a característica de normalidade para a distribuição de ganhos e perdas da carteira. Demonstra-se, inclusive, que nestes casos a distribuição é enviesada (o que invalida a aplicação da simetria imposta pelos factores de escala $z_{1-\alpha}$ na construção dos intervalos de confiança para o VAR) e achatada. Em adição, a não linearidade modifica os próprios momentos (média, variância, etc.) da distribuição.

O enviesamento da distribuição tem implicações tremendas para o cálculo do VAR uma vez que, como sabemos, este depende objectivamente da cauda esquerda da distribuição de ΔP .³³⁹

⁽³³⁹⁾ Por exemplo, a distribuição de probabilidades para o retorno de uma posição longa numa opção de compra exhibe um claro enviesamento positivo (a perda máxima é limitada pelo prémio pago!), pelo que esta terá uma cauda esquerda mais estreita do que a distribuição normal. Posto isto, na eventualidade de se assumir erradamente que ΔP segue uma distribuição normal, verifica-se que as estimativas do VAR excederão o seu verdadeiro valor. Na mesma linha de raciocínio, o excesso de achatamento da distribuição aumenta, relativamente ao suposto pela distribuição normal, a probabilidade de ocorrência de choques muito significativos sobre o factor de risco subjacente (eventos extremos), e de alterações de dimensão de pouca importância, reduzindo a probabilidade de movimentos moderados. Esta característica é suficiente para distorcer significativamente as estimativas do VAR produzidas pelo método convencional.

Método Delta-Normal

O primeiro esboço de resolução analítica do problema da não linearidade é devido a Garbade (1986c). O autor modeliza as variações no valor da carteira através de uma aproximação linear (*delta*, local, ou de 1ª ordem), continuando a presumir que as alterações nos factores de risco são bem espelhadas por uma distribuição (multivariada) Gaussiana.³⁴⁰ Pelas suas propriedades, o método foi apelidado de *Método Delta-Normal*. Em termos formais, o pressuposto de linearidade para ΔP pode ser escrito por:

$$\Delta P \cong \sum_{k=1}^J \delta_k \frac{\Delta S_k}{S_k} \quad , \quad \delta_k = \frac{dP}{dS_k} S_k \quad (10.13)$$

onde δ_k representa a sensibilidade da carteira com respeito ao factor k . Se em alternativa usarmos notação matricial temos: $\Delta P \cong \delta^T R$, onde δ denota o vector ($J \times 1$) para as sensibilidades, e R o vector ($J \times 1$) para os retornos dos factores de risco. A hipótese de normalidade pode, por seu turno, ser sintetizada por $R \sim N(\mu, \Sigma)$. Neste quadro, prova-se que a distribuição de ΔP é qualificada como univariadamente normal, isto é, $\Delta P \sim N(\mu, \delta^T \Sigma \delta)$, e que o VAR é calculado, para $\mu = 0$, segundo:

$$VAR = -P_0 \times z_{1-\alpha} \times \sqrt{\delta^T \Sigma \delta} \quad (10.14)$$

As estimativas do VAR produzidas pelo método delta-normal apenas podem ser consideradas fiáveis para pequenas variações nos factores de risco. Nos casos em que a função de preço é convexa (e.g. obrigação clássica), o método introduz um claro erro de estimação sobrestimando o verdadeiro valor em risco da posição.

⁽³⁴⁰⁾ O sistema RiskMetrics baseia-se igualmente numa aproximação linear para ΔP , mas difere do modelo de Garbade (1986c) na forma como modeliza as variações nos factores de risco usando, como vimos, um procedimento de ponderação dos choques no cálculo da matriz Σ .

Método Delta-Gamma Normal

Para lidar com o problema da curvatura, Wilson (1994), Fallon (1996), Pritsker (1996), Britten-Jones e Schaefer (1999), e Coronado (2000), entre outros, sugerem a inclusão de um termo quadrático (*gamma*, ou de 2ª ordem) na aproximação a ΔP , ou seja:

$$\Delta P \cong \delta^T R + 1/2 R^T \Gamma R \quad (10.15)$$

onde Γ denota a matriz ($J \times J$) dos termos gamma $\Gamma_{ij} = \frac{d^2 P}{dS_i dS_j} S_i S_j$.³⁴¹ Os autores

continuam, todavia, a presumir que os choques sobre os factores de risco são independentes e normalmente distribuídos, pelo que nestas circunstâncias ΔP é aproximado por uma função quadrática de J variáveis normalmente distribuídas.³⁴²

Pelas suas características, o método é conhecido por *Delta-Gamma Normal* ($\Delta - \Gamma$).

Os dois primeiros momentos (média e variância) da aproximação $\Delta - \Gamma$ a ΔP são dados, respectivamente, por $\mu_1 = 1/2 \text{tr}(\Gamma \Sigma)$ e por $\mu_2 = \delta^T \Sigma \delta + 1/2 \text{tr}(\Gamma \Sigma)^2$, onde tr

(³⁴¹) Refira-se que a adição de um termo quadrático à expansão de Taylor nos casos em que a carteira inclui opções deve ser feita, no entender de Estrella (1996), com especiais cautelas. Citando o autor (pp. 375): «*In risk management applications involving a preponderance of relatively small moves, it may be feasible – though sometimes risky – to use a Taylor approximations. For moves no larger than one standard deviation, the accuracy of gamma approximations seems generally adequate. Problems may arise however, if attention is focused on the tails of the distribution, as is often the case in risk management applications. (...) Special care should be used when approximating the values of highly non-linear options, such as near-the-money short maturity options.*».

(³⁴²) Nos casos em que a carteira depende um único factor de risco, isto é, quando $J = 1$, Britten-Jones e Schaefer (1999) demonstram que a aproximação $\Delta - \Gamma$ segue, não uma distribuição normal, mas uma distribuição de χ^2 não centrada. Para $J \geq 2$ a distribuição envolve a soma de variáveis χ^2 não centradas. Segundo Finger (1997), a manutenção da hipótese de normalidade conjunta no contexto da aproximação Δ ou $\Delta - \Gamma$ a posições não lineares apenas pode ser justificada pela aplicação do Teorema do Limite Central a carteiras constituídas por um número suficientemente grande de activos (pelos menos 20 segundo o autor), e nos casos em que os factores de risco não estão correlacionados. Pichler e Selitsch (1999) contestam esta última conclusão e argumentam que mesmo nos casos em que os factores de risco são não correlacionados a distribuição dos retornos de uma carteira de opções não converge para a distribuição normal.

simboliza o traço da matriz.³⁴³ Se admitirmos que $\mu_1 = 0$, a estimativa do VAR fornecida pelo método $\Delta - \Gamma$ é então dada por:³⁴⁴

$$VAR = -P_0 \times z_{1-\alpha} \times \sqrt{\delta^T \Sigma \delta + 1/2 \text{tr}(\Gamma \Sigma)^2} \quad (10.16)$$

O principal entrave à implementação deste método centra-se na obtenção de estimativas para δ e Γ .³⁴⁵

Método Delta-Gamma Normal de Wilson

A solução preconizada por Wilson (1994) para obter estimativas do VAR adopta, no essencial, as hipóteses base da aproximação $\Delta - \Gamma$ convencional, demarcando-se dos métodos anteriores pela redefinição que é feita do conceito de VAR. De facto, para este autor o VAR representa “*the maximum possible loss over an orderly liquidation period within a given confidence interval*”.³⁴⁶

Ou seja, o VAR não é mais do que a solução para o problema de optimização que determina o evento que maximiza as perdas da carteira, sujeito à restrição de que esse evento e todos os que geram perdas inferiores estão compreendidos num determinado intervalo de confiança. Em termos formais, e fazendo uso da aproximação quadrática avançada em (10.15), o VAR estimado pelo *Método Delta-Gamma de Wilson* é dado por:

(³⁴³) Repare-se que, em comparação com a aproximação delta-normal, onde $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \delta^T \Sigma \delta$ e $\Gamma = 0$, um termo de ajustamento é adicionado, quer ao valor esperado, quer à variância da aproximação.

(³⁴⁴) Chama-se a atenção para o facto de, estando nós perante uma distribuição não normal, o valor de $z_{1-\alpha}$ ser aqui usado apenas como uma estimativa do valor crítico da *f.d.p.* normalizada.

(³⁴⁵) Pelo menos três soluções foram adiantadas para resolver este problema: (i) Jamshidian e Zhu (1996) utilizam dados de mercado para o delta e para o gamma, um método que esbarra nalguns casos com a escassez de dados históricos para as posições desejadas; (ii) Fallon (1996) propõe o recurso a um procedimento econométrico não linear para estimar os parâmetros da equação (10.15); (iii) Duffie e Pan (1997) sugerem a utilização de métodos numéricos.

(³⁴⁶) Wilson (1994, pp. 74).

$$VAR = \underset{\{\Delta S\}}{Max} - \left[\delta^T \Sigma \delta + 1/2 tr(\Gamma \Sigma)^2 \right] \quad \text{s.a.} \quad \Delta S^T \Sigma^{-1} \Delta S \leq \alpha^2 \quad (10.17)$$

A metodologia seguida pela aproximação $\Delta - \Gamma$ pode ser generalizada com vista a incorporar factores de risco adicionais para além daquele que é representado pelo risco de activo subjacente. A título de exemplo, Malz (2000) efectua uma primeira tentativa de incluir o risco de volatilidade (risco *vega*) no cálculo do VAR para opções.

Métodos Baseados na Correção dos Momentos da Distribuição

A evidência empírica de que as distribuições dos retornos dos activos financeiros (especialmente posições não lineares) se afastam do padrão Gaussiano e exibem aquilo que convencionalmente se designa por *fat tails*³⁴⁷, redireccionou as preocupações dos investigadores no sentido de incluir momentos de ordem superior da distribuição de ΔP na estimação do VAR. A primeira diligência para incorporar este fenómeno, conhecida por *abordagem baseada na correção dos momentos*, é devida a Zangari (1996), Fallon (1996), Pritsker (1996) e Fong e Vasicek (1997). A técnica consiste em calcular directamente o percentil desejado da aproximação $\Delta - \Gamma$ a ΔP , usando um procedimento que corrige as distorções induzidas pelo enviesamento e pelo achatamento no valor crítico da distribuição normal estandardizada ($z_{1-\alpha}$).

Em termos formais, e conhecidos os momentos da aproximação $\Delta - \Gamma$ a ΔP , o *valor crítico ajustado* $[z_{1-\alpha}^f]$ é calculado directamente a partir do valor crítico da distribuição

⁽³⁴⁷⁾ São numerosos os intentos de incorporar este fenómeno no cálculo do VAR, na maioria dos casos abandonando a hipótese de normalidade para os retornos dos factores de risco. Entre as principais soluções apresentadas destacamos as preconizadas por Fong e Vasicek (1997), que sugerem o uso da distribuição *Gamma*, por Wilson (1993), que promove o uso da distribuição t-Student, e por Zangari (1996a), Venkataraman (1997) e Hull e White (1998) que recomendam a utilização de uma mistura de distribuições normais. Uma abordagem alternativa é fornecida pela Teoria dos Valores Extremos.

normal estandardizada mediante uma *expansão de Cornish-Fisher*. Zangari (1996) usa uma expansão contemplando os quatro primeiros momentos:

$$z_{1-\alpha}^{cf} = z_{1-\alpha} + \frac{1}{6}(z_{1-\alpha}^2 - 1)\rho_3 + \frac{1}{24}(z_{1-\alpha}^3 - 3z_{1-\alpha})\rho_4 - \frac{1}{36}(2z_{1-\alpha}^3 - 5z_{1-\alpha})\rho_3^2 \quad (10.18)$$

onde μ_3 e μ_4 denotam o 3º e 4º momentos da aproximação $\Delta - \Gamma$ a ΔP , e ρ_3 e ρ_4 são indicadores do enviesamento e do achatamento, respectivamente. Nestas condições, e para $\mu_1 = 0$, o VAR estimado segundo:

$$VAR = -P_0 \times z_{1-\alpha}^{cf} \times \sqrt{\delta^T \Sigma \delta + 1/2 \text{tr}(\Gamma \Sigma)^2} \quad (10.19)$$

A segunda abordagem, atribuída a Fong e Vasicek (1997), reconhece explicitamente a não simetria da aproximação $\Delta - \Gamma$ a ΔP , e recomenda a correcção do efeito produzido pelo enviesamento no valor crítico da distribuição normal usando uma aproximação baseada na *Distribuição Gamma*. Da aplicação desta metodologia resulta a seguinte a fórmula para o cálculo do VAR:

$$VAR = -P_0 \times k(\gamma) \times \sqrt{\delta^T \Sigma \delta + 1/2 \text{tr}(\Gamma \Sigma)^2} \quad (10.20)$$

onde $k(\gamma)$ indica a ordenada da distribuição gamma para um determinado nível de confiança.³⁴⁸ O termo $\gamma = \mu_3/\sigma^3$ denota o indicador de enviesamento da distribuição.

Métodos Baseados na Convergência dos Momentos da Distribuição

Em alternativa às soluções anteriores, Zangari (1996b), Britten-Jones e Schaefer (1999), El-Jahel *et al.* (1999) e Mina e Ulmer (1999) relatam um método que envolve a convergência dos momentos (*moment-matching approach*) da aproximação $\Delta - \Gamma$ a ΔP .

⁽³⁴⁸⁾ Fong e Vasicek (1997) reportam valores para $k(\gamma)$ considerando um nível confiança de 99%.

com os momentos de uma distribuição com forma conhecida. Zangari (1996b), por exemplo, recomenda o uso de uma família de distribuições (*Johnson family*) para fazer convergir os quatro primeiros momentos de (10.15).³⁴⁹

O método promove, em primeiro lugar, a transformação dos retornos da carteira (R_p) em retornos de uma distribuição normal estandardizada [$R_N \sim N(0,1)$].³⁵⁰ Posto isto, procede-se ao cálculo do percentil desejado da distribuição de Johnson [$J_{1-\alpha}$] mediante:

$J_{1-\alpha} = c + df^{-1}[(z_{1-\alpha} - a)/b]$. Por fim, o VAR é estimado VAR segundo:

$$VAR = -P_0 \times J_{1-\alpha} \times \sqrt{\delta^T \Sigma \delta + 1/2 \text{tr}(\Gamma \Sigma)^2} \quad (10.21)$$

10.3.2.2. Método de Simulação Histórica

Em vez de formular hipóteses sobre a forma como os factores de risco se distribuem, o *Método de Simulação Histórica* (MSH) utiliza os retornos passados para gerar (hipotéticos) cenários futuros para o comportamento destas variáveis, simular a distribuição de probabilidade para os ganhos e perdas esperados da carteira e, deste forma, estimar o VAR.

(³⁴⁹) Na mesma linha de investigação, Britten-Jones e Schaefer (1999) propalam o uso de uma distribuição de χ^2 centrada que faça o *match* dos primeiros três momentos da aproximação $\Delta - \Gamma$ a ΔP . El-Jahel *et al.* (1999) avançam com um procedimento de convergência semelhante, com a diferença de que a hipótese de normalidade conjunta para a distribuição dos factores de risco é substituída por um processo estocástico para a volatilidade.

(³⁵⁰) A título de exemplo, a *distribuição normal* de Johnson pressupõe a seguinte transformação: $R_N = a + b \times f((R_p - c)/d)$, onde $f(\cdot)$ é uma função monótona, e a , b , c e d são parâmetros a ser determinados pelos primeiros quatro momentos de (10.15) recorrendo a um algoritmo iterativo. Para além da distribuição normal, a *família de distribuições de Johnson* inclui uma transformação *log-normal*, uma transformação limitada (*bounded*) e uma transformação não limitada (*unbounded*). A escolha da transformação apropriada depende da raiz quadrada do rácio entre os terceiro e quarto momentos da aproximação $\Delta - \Gamma$ a ΔP .

O método assenta no pressuposto, implícito, de que o investidor detém a actual carteira de activos por um período de tempo igual ao da *janela de estimação*.³⁵¹ Significa isto que se assume, também de forma implícita, que a distribuição dos retornos registada no passado constitui uma boa aproximação daquilo que se espera venha a ser o seu comportamento futuro.

A implementação prática deste método é bastante simples (desde que se disponha de uma base de dados adequada) mas obedece aos seguintes procedimentos sequenciais³⁵²:

(i) identificação dos factores de risco que afectam a carteira actual; (ii) definição de uma janela de observação fixa³⁵³ para as observações passadas a utilizar na construção dos cenários; (iii) geração de cenários para os factores de risco; (iv) reavaliação integral (ou aproximada recorrendo, por exemplo, ao método $\Delta - \Gamma$) da carteira obtendo-se, em consequência, uma distribuição de (hipotéticos) ganhos e perdas; (v) construção do histograma para as perdas e ganhos e, por fim, (vi) selecção do percentil correspondente ao VAR.

(351) O termo *janela de estimação* (ou *janela de observação*) designa, normalmente, o subperíodo ($T - t$) da amostra de dados históricos usado para obter estimativas do VAR. A escolha da dimensão da janela de observação é condicionada pela disponibilidade de séries históricas e pelo horizonte de investimento desejado. Não obstante, a recomendação do Comité de Basileia aponta para o uso de dados referentes aos últimos 250 dias (um ano) de negociação. Jackson *et al.* (1997) argumentam que as estimativas do VAR baseadas em janelas de observação mais longas são mais fiáveis. Beder (1995) demonstra que o valor do VAR aumenta com o alargamento do intervalo de observação. Hendricks (1996) afirma que as estimativas do VAR são tanto mais estáveis quanto maior for o período de observação.

(352) Para uma descrição mais pormenorizada dos procedimentos necessários à implementação do método de simulação histórica ver, por exemplo, Jorion (1997) e Dowd (1998).

(353) A delimitação de uma janela fixa (de maior ou menor dimensão) representa sempre um compromisso entre a fiabilidade das estimativas e o uso de dados irrelevantes, mas acarreta importantes erros de medição e enviesas as estimativas do VAR. A principal causa destes erros reside no chamado *roll-off effect*, um efeito que advém do facto de, por cada dia que passa, ser necessário substituir a observação mais antiga na amostra pela observação mais recente. Este procedimento, aparentemente inofensivo, pode significar que cenários relativos a movimentos significativos (principalmente os adversos) nos factores de risco são retirados da amostra, descaracterizando a verdadeira distribuição de probabilidades. Uma segunda justificação para os erros de amostragem, avançada por Holton (1998), prende-se com a possibilidade dos cenários gerados a partir de uma janela fixa corresponderem a cenários em que o factor de risco experimentou uma tendência líquida ascendente ou descendente.

Para além da sua simplicidade, o MSH apresenta um conjunto de predicados que o tornam eficaz no tratamento dos problemas suscitados pela não normalidade e pela não linearidade: (i) o MSH é independente da forma como os retornos dos factores de risco se distribuem, i.e., elimina os riscos de má especificação; (ii) as características da distribuição dos factores de risco estão expressas no comportamento histórico das séries financeiras; (iii) a reavaliação completa da carteira em cada cenário permite obter informações valiosas sobre os atributos da distribuição de ganhos e perdas e elimina os erros de cálculo inerentes ao uso de fórmulas de aproximação; (iv) por último, e não menos importante, existe já alguma evidência empírica (embora não consensual) que suporta a convicção de que o MSH faculta estimativas do VAR mais fiáveis do que as oferecidas pelas abordagens paramétricas baseadas na hipótese de normalidade.³⁵⁴

Apesar das suas múltiplas virtudes, o MSH é alvo de um conjunto importante de críticas pelos seguintes motivos: (i) pelo facto da aplicação do método ser condicionada pela existência (ou não) de dados históricos em quantidade (e qualidade) suficiente; (ii) pelo impacto produzido pelo já referido *roll-off-effect*; (iii) pelo facto do MSH assumir, implicitamente, que o comportamento passado dos factores de risco, expresso numa única amostra, é suficiente para fornecer uma estimativa correcta dos riscos futuros, algo que, segundo Jorion (1997), Dowd (1998) e Barone-Adesi *et al.* (1998) introduz erros de especificação significativos³⁵⁵; (iv) pelo facto de, segundo Jackson *et al.* (1997) e

(³⁵⁴) Hendricks (1996), por exemplo, avalia a performance de 12 métodos distintos no cálculo do VAR (usando 9 critérios de desempenho) e conclui que as estimativas produzidas pelo MSH tendem a ser superiores às geradas pelos métodos paramétricos. Esta conclusão é perfilhada por Jackson *et al.* (1997, pp. 87), mas contestada por Kupiec (1995), pelo que não existe unanimidade nesta matéria.

(³⁵⁵) Os defensores do MSH, nomeadamente Beder (1995) e Hendricks (1996), contrapõem esta afirmação argumentando que a utilização de janelas de observação mais alargadas (com mais dados) fará reduzir o erro de convergência. É preciso ter em conta, todavia, que ao fazê-lo se corre claramente o risco de os dados antigos não reflectirem de forma adequada as actuais condições de mercado.

Holton (1998), o MSH evidenciar especiais dificuldades para conviver com o problema de heterocedasticidade³⁵⁶; (v) pelas distorções suscitadas pela existência de tendências implícitas para os factores de risco na janela de observação, ultrapassáveis em certa medida pela adopção de procedimentos de *bootstrap*³⁵⁷ e de *mirror scenarios*³⁵⁸; (vi) por fim, pela incapacidade revelada pelo método para incorporar riscos associados a fenómenos específicos.³⁵⁹

(³⁵⁶) Recordamos que o MSH trata os dados históricos como provindo de uma distribuição de probabilidades que é fixa no tempo. Uma das consequências imediatas desta hipótese é a de que o método pondera de forma igual todas as observações que fazem parte da janela, isto é, atribui a mesma importância a observações recentes e a observações bastante afastadas no tempo. Holton (1998) e Dowd (1998) apresentam um método para ultrapassar esta dificuldade, baseado no uso dos chamados *cenários ponderados* (*weighted scenarios*). O principal objectivo deste método é o de atribuir maior importância aos cenários mais recentes, descontando fortemente os cenários mais afastados no tempo. Na prática, tal significa que qualquer observação exercerá o seu efeito máximo sobre o VAR imediatamente após a ocorrência, reduzindo-se a partir de então a sua influência, de forma gradual, até se desvanecer completamente. Esta técnica é aplicável, quer no contexto do MSH, quer no contexto do método de Simulação de Monte Carlo. Duffie e Pan (1997) alvitram uma solução alternativa descrevendo um mecanismo de actualização dos retornos históricos cujo intento é o de reflectir uma estrutura de correlação mais adequada às actuais condições de mercado.

(³⁵⁷) O procedimento de *bootstrap*, sugerido por Duffie e Pan (1997), Dowd (1998) e Jorion (1997), entre outros, apresenta como principal diferença face à tradicional geração de cenários para os factores de risco a partir dos dados históricos (onde se preserva a ordenação natural das observações) o facto de neste caso a amostragem (aleatória) se efectuar com reposição. À semelhança do MSH, o procedimento de *bootstrap* incorpora implicitamente as características da distribuição em termos de volatilidade, correlação e probabilidade de ocorrência de eventos extremos, mas apresenta a vantagem de permitir a construção de tantos cenários quantos os desejados. Este predicado permite, de certa forma, mitigar alguns dos problemas associados à dimensão da amostra nos casos em que a base de dados é curta. O método de *bootstrap* assenta, todavia, no pressuposto crítico de que os retornos dos factores de risco são independentes (não correlacionados) ao longo do tempo, hipótese esta que, quando violada, transforma o procedimento de amostragem com reposição numa fonte de erro adicional no cálculo do VAR.

(³⁵⁸) A utilização dos chamados *mirror scenarios* foi sugerida por Holton (1998) como forma de eliminar o problema da tendência implícita subjacente à utilização do MSH no cálculo do VAR. O procedimento é bastante simples e assenta nos seguintes passos: (i) em primeiro lugar são gerados cenários para os retornos dos factores de risco a partir dos dados históricos; (ii) em seguida, e para cada um desses cenários, multiplica-se o retorno pelo factor (-1) , obtendo-se desta forma um retorno simétrico (*mirror*); (iii) por fim, aplica-se este retorno fictício ao valor da posição actual, deduzindo assim um novo *mirror scenario* para a distribuição de ganhos e perdas da carteira. Esta técnica permite não apenas eliminar o problema da tendência implícita, como duplicar o número de cenários utilizados para estimar o VAR reduzindo, desta forma, o erro de convergência.

(³⁵⁹) Mais propriamente a eventos que não ocorreram no passado mas que são esperados para um futuro próximo (e.g. eventos políticos, alterações de regime cambial, monetário, etc.). Saliente-se, contudo, que esta limitação é partilhada por todos os métodos de simulação.

10.3.2.3. Método de Simulação de Monte Carlo

O *Método de Simulação de Monte Carlo* (MSMC) constitui uma alternativa poderosa aos métodos já apresentados no cálculo do VAR. Respeitando, na sua essência, os mesmos princípios que o MSH, o MSMC distingue-se todavia deste pela forma como são gerados os cenários para os factores de risco. Efectivamente, enquanto que no MSH os cenários são construídos a partir dos dados históricos, no MSMC estes são gerados de forma aleatória, usando-se as séries financeiras apenas para inferir as características estatísticas da distribuição dos factores de risco.

A implementação do MSMC obedece aos seguintes passos: (i) selecção dos modelos (processos estocásticos) que, se julga, melhor explicam o comportamento de cada um dos factores de risco a que a carteira está exposta; (ii) estimação dos parâmetros dos modelos; (iii) geração, através de mecanismos de produção de números (pseudo) aleatórios³⁶⁰, de cenários para os factores de risco, com a condição de que estes devem ser consistentes com a matriz de variâncias e covariâncias histórica; (iv) em cada cenário a carteira é então reavaliada, de forma integral ou recorrendo a uma aproximação; (v) tabulação da distribuição de perdas e ganhos da carteira; (vi) por fim, leitura directa do VAR correspondente ao nível de confiança desejado.

A elevada flexibilidade do MSMC torna-o especialmente indicado: nos casos em que a presença de não linearidade é acentuada (e.g. opções), nos casos em que o uso da

(³⁶⁰) Para mais detalhes sobre os aspectos práticos envolvidos na geração de números aleatórios, nomeadamente sobre o número de iterações a efectuar, sobre a necessidade de assegurar a semi-positividade da matriz de variâncias e covariâncias, e sobre as técnicas de redução de variância, veja-se Jorion (1997), Dowd (1998) e Cárdenas *et al.* (1999).

distribuição normal é desaconselhado, para obter estimativas do VAR de posições complexas nos activos subjacentes (e.g. combinações de activos derivados), e no contexto de problemas multidimensionais em que as carteiras estão expostas a um elevado número de factores de risco. O método apresenta ainda a vantagem de permitir a condução de análises de sensibilidade.

Em termos práticos, a principal dificuldade de implementação do MSMC situa-se, porventura, ao nível da exigência computacional e de tempo de cálculo.³⁶¹ A nível conceptual, o MSMC está sujeito ao inevitável *risco de especificação* do modelo.³⁶² A juntar a este risco, o VAR calculado pelo MSMC enfrenta um *erro de convergência*, ditado pelo facto do método se basear numa simulação que usa um número finito de cenários e constituir, por isso, uma aproximação à verdadeira distribuição. Aumentando o número de cenários o erro de convergência pode, no entanto, ser minimizado.

10.3.2.4. Método de Análise de Cenários (Stress Testing Method)

Os métodos paramétrico, de simulação histórica, e de simulação de Monte Carlo estimam as perdas esperadas da carteira (o VAR) tomando em consideração oscilações não abruptas nos factores de risco. Num campo oposto, o *método de análise de cenários*, também conhecido por *stress testing method*, examina a vulnerabilidade da carteira na

(³⁶¹) Jamshidian e Zhu (1997), Singh (1997) e Duffie e Pan (1997) propõem *metodologias de simulação de cenários* baseadas na análise dos componentes principais como forma de ultrapassar este problema e reduzir o número de cenários a avaliar. Uma alternativa possível é conferida pelos métodos de simulação parcial (*Grid Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo Approaches*).

(³⁶²) Segundo Holton (1998) o risco de especificação tem origem: (i) no facto da distribuição escolhida para os factores de risco reflectir de forma imperfeita a verdadeira distribuição; (ii) no facto das estimativas de volatilidade e correlação serem obtidas com base num conjunto limitado de dados históricos, induzindo deste modo um erro de amostragem; (iii) no facto das condições de mercado apresentarem um comportamento não estacionário; e por último (iv) nas imperfeições introduzidas pelo mecanismo gerador de números aleatórios.

eventualidade de se registarem oscilações significativas nos factores de risco. Sublinha-se, no entanto, que o método apenas pretende avaliar o impacto resultante dos eventos extremos, nada intuindo sobre a sua probabilidade de ocorrência. O método faz uma espécie de análise de sensibilidade, um exercício de julgamento, partindo de cenários puramente hipotéticos³⁶³ ou cenários associados a eventos extremos ocorridos no passado.³⁶⁴ Uma vez definidos os cenários a avaliar, a obtenção de estimativas para o VAR segue trâmites similares aos já apresentados para o MSH e para o MSMC.³⁶⁵

A análise de cenários constitui um complemento desejável para os demais métodos de cálculo do VAR, na medida em que permite descortinar, sem limitações, o que aconteceria à carteira se alguma das hipóteses de partida (sobre a volatilidade ou correlação, por exemplo) fosse violada. O mecanismo permite incorporar na gestão do risco os aspectos qualitativos que, de outra forma, seriam negligenciados.³⁶⁶

10.3.3. Limitações da Metodologia Value at Risk

A importância crescente das metodologias VAR enquanto ferramentas de medição e gestão do risco de taxa de juro reforça, de sobremaneira, a necessidade de conhecer as

(³⁶³) O chamado “New York 7”, um conjunto de 7 cenários de taxa de juro definidos pelas autoridades de supervisão no estado de Nova Iorque, constitui um exemplo bem elucidativo destes cenários.

(³⁶⁴) Por exemplo, crashes bolsistas, alterações estruturais no sistema cambial (e.g. SME, moeda única, inconvertibilidade da moeda), choques abruptos sobre a EPTJ, crises políticas, fenómenos naturais, conflitos militares, etc.

(³⁶⁵) Para mais detalhes sobre a parametrização de cenários de *stress test* com vista ao cálculo do VAR ver, por exemplo, Kupiec (1998).

(³⁶⁶) A realização de *Stress Tests* é, inclusive, uma exigência imposta pelo Comité de Basileia aos bancos que utilizam modelos internos de gestão do risco de mercado para calcular o VAR. Refira-se a propósito que o documento de suporte ao novo acordo de Basileia acentua a importância do *stress testing* no conjunto das práticas de medição, monitorização e controlo do risco de taxa de juro. Para mais detalhes sobre assunto ver Basle Committee on Banking Supervision (2001).

suas principais limitações. Para além de todas as desvantagens já apontadas aos vários métodos de cálculo, o conceito VAR apresenta alguns pontos fracos.

Desde logo o facto de todos os sistemas de cálculo do VAR tentarem, de forma directa (extrapolando os retornos) ou indirecta (através do comportamento implícito na matriz de variâncias e covariâncias), estimar as perdas futuras da carteira com base nos dados históricos, isto é claro, assumindo que as tendências registadas no passado constituem uma boa base de partida para a previsão do futuro.³⁶⁷ Citando Dowd (1998, pp. 22), «(...) *trying to use VAR system is like trying to drive by looking through the rear-view mirror*».

A este elemento acresce o facto das posições que fazem parte da carteira variarem ao longo do tempo, pelo que a extrapolação de valores do VAR obtidos num dado intervalo para horizontes temporais mais longos revela-se problemática.³⁶⁸ Noutro campo, o sistema VAR assume que existe uma base de dados disponível, o que nem sempre é verdade.³⁶⁹

A maioria dos sistemas VAR enfrenta ainda um *erro de medida* para os parâmetros (são usadas estimativas amostrais) e um *risco de especificação*, uma consequência nefasta que advém da necessidade de escolher um processo estocástico para os factores de risco.

(³⁶⁷) Significa isto que os sistemas de VAR reflectem apenas os riscos observados e não são, por isso, úteis em períodos de transição caracterizados por mudanças estruturais, riscos adicionais, redução da liquidez dos activos e quebras de correlação entre os activos e entre os mercados.

(³⁶⁸) Duffie e Pan (1997) salientam, por exemplo, que nos casos em que a dimensão das posições intra-período é estocástica, a estimativa do VAR deve ser calculada multiplicando o valor obtido sob a hipótese de dimensão constante por um factor.

(³⁶⁹) Acresce que quando não existe informação histórica para uma determinada posição é necessário efectuar o *mapping* dos instrumentos, o que reduz, obviamente, a precisão das estimativas. O procedimento de *mapping* consiste em expressar cada posição em termos dos seus cash flows base redistribuindo-os, quando necessário, por um conjunto pré-determinado de *vértices* de maturidade para os quais existem dados de volatilidade e correlação. Para mais detalhes sobre esta técnica ver JP Morgan (1996), Golub e Tilman (1997) e Singh (1997).

V - Evidência Empírica Sobre o Desempenho de Modelos Multifactor: Uma Aplicação ao Mercado Português

11. Testes de Imunização Considerando o Modelo M-Vector

11.1. Âmbito e Finalidade do Estudo Empírico

A curta história do mercado de Obrigações do Tesouro (OT's) em Portugal só agora torna possível a realização de estudos sobre o desempenho de estratégias de imunização. Ainda assim, a realidade encarregou-se de transformar esta curta existência num rico campo de experimentação para as mais recentes modelizações.

Num estudo recente sobre a performance dos modelos unifactoriais (dependentes do processo estocástico e de equilíbrio), Pereira e Cassola (1998) concluem que os modelos de imunização reduzem muito pouco o risco subjacente a uma convencional estratégia de maturidade. A principal justificação para esta má performance prende-se, em nosso entender, com o facto de estes modelos se basearem numa premissa (a de que a dinâmica das taxas de juro é comandada por um único factor, choques sobre o nível) que, como veremos em seguida, não é consistente com o comportamento evidenciado pelas taxas de juro em Portugal, pelo menos no período analisado.

Neste sentido, constituem objectivos principais deste estudo empírico: (i) Efectuar uma primeira caracterização à forma como a EPTJ evolui ao longo do tempo, identificando os factores que são críticos para o sucesso de uma estratégia de imunização; (ii) Avaliar, numa amostra mais alargada, a capacidade dos modelos de imunização para reduzir o risco inerente à convencional estratégia de maturidade; (iii) Demonstrar a superioridade

das estratégias de imunização que se baseiam em modelos multifactor (mais propriamente da que se baseia no modelo *M-Vector*) sobre a tradicional estratégia de Duração de Fisher e Weil; (iv) Determinar a dimensão óptima do vector de medidas de risco de taxa de juro a considerar para efeitos de imunização.

11.2. Caracterização do Comportamento das Taxas de Juro

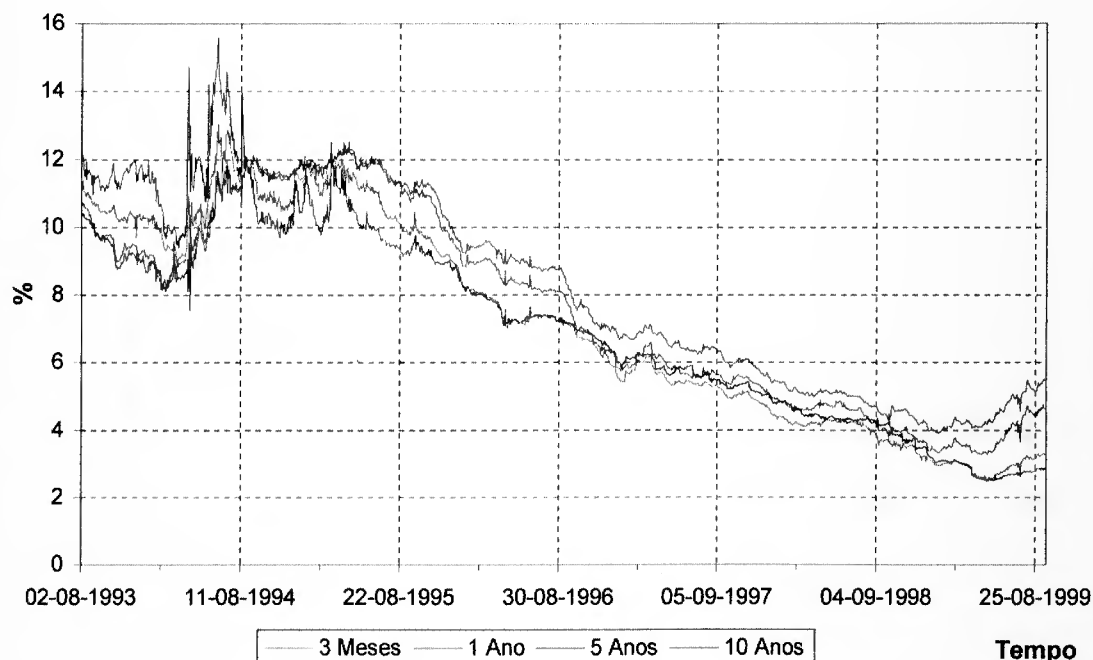
11.2.1. Enquadramento Geral

A caracterização da tendência geral das taxas de juro no mercado à vista no período amostral que vai de Agosto de 1993 até Setembro de 1999 é feita com base nas estimativas previamente obtidas por Cassola e Luís (1996).³⁷⁰ Estes autores utilizam a especificação de Nelson-Siegel-Svensson apresentada no ponto 7.6. para obter estimativas directas das taxas *spot* para os diferentes prazos. A figura 11.1 apresenta a evolução diária de um conjunto de taxas de juro, representativas do espectro de prazos habitualmente negociado em Portugal.

Conforme se observa, o primeiro terço da amostra evidência um padrão de instabilidade acentuada para toda a EPTJ, com alterações frequentes e significativas nas taxas de juro para todos os prazos. Estas oscilações são justificadas, em grande medida, pelas constantes intervenções das autoridades monetárias portuguesas para manter o escudo nos intervalos de flutuação do Mecanismo de Taxas de Câmbio (MTC) do Sistema Monetário Europeu (SME).

(³⁷⁰) Para mais detalhes sobre esta modelização recomenda-se a leitura do artigo original e do ponto 7.6.

Figura 11.1: Evolução das Taxas de Juro no Período da Amostra



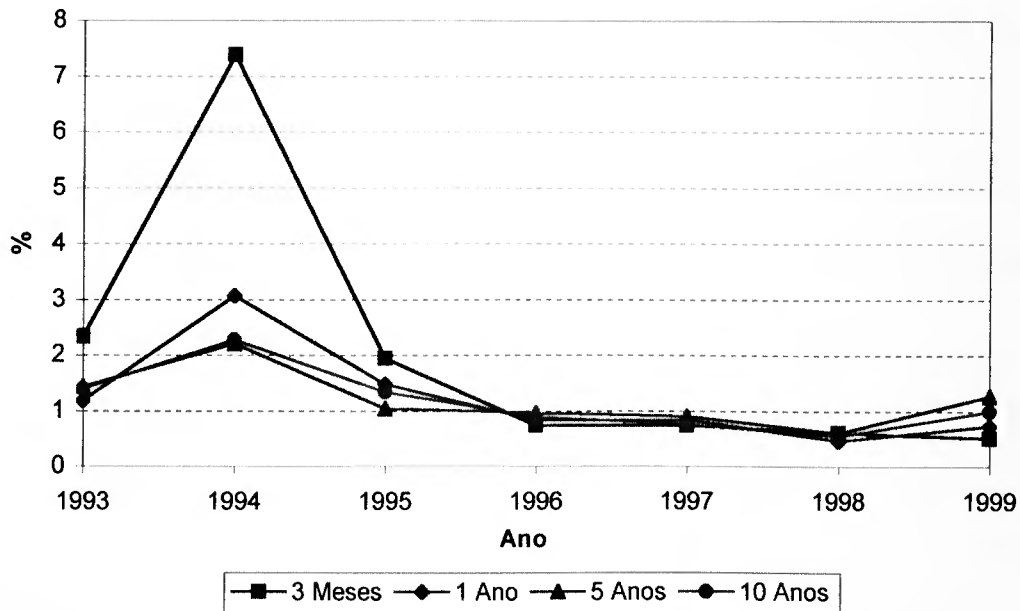
Nota: Todas as taxas apresentadas estão numa base anualizada.

A partir do segundo semestre de 1995, e até finais de 1998, assiste-se a uma clara alteração de regime com as taxas para todas as maturidades a revelarem uma tendência monotonamente decrescente, com reduzida volatilidade. O realinhamento das cotações centrais no MTC do SME registado neste período e o alargamento das bandas de flutuação máxima para $\pm 15\%$, propiciaram um ambiente favorável à convergência das taxas de juro para os limites definidos pelas condições de acesso à terceira fase da União Económica e Monetária (UEM). Na parte final do período assiste-se a uma inversão na tendência das taxas de juro, com um ligeiro acréscimo na volatilidade

11.2.2. Perfis de Volatilidade e Correlação Para os Choques de Taxa de Juro

A figura 11.2 exhibe, para cada um dos anos que compõem a amostra, o desvio padrão anualizado para a variação quinzenal nas taxas de juro *spot*.

Figura 11.2: Evolução da Volatilidade das Taxas de Juro



O comportamento da volatilidade no período da amostra é marcado: (i) por uma trajectória claramente descendente, pese embora se tenha registado alguma instabilidade, especialmente nos prazos mais curtos; (ii) pelo facto da volatilidade para as diferentes taxas não flutuar de forma paralela ao longo do tempo, o que indicia, desde já, que as oscilações nas taxas de juro são determinadas, não por um, mas por vários factores. No quadro 11.1 avançamos um pouco e investigamos a correlação entre as taxas de juro (mais propriamente entre as suas variações) para os diferentes prazos.

Quadro 11.1: Correlação Entre as Variações nas Taxas de Juro

Prazos	0,25	0,5	1	2	3	5	7	10
0,25	1	0,96	0,85	0,69	0,56	0,45	0,44	0,47
0,5		1	0,95	0,80	0,66	0,53	0,52	0,54
1			1	0,92	0,80	0,66	0,63	0,66
2				1	0,96	0,86	0,82	0,81
3					1	0,96	0,92	0,88
5						1	0,99	0,94
7							1	0,98
10								1

Notas: Os valores indicados no quadro correspondem aos coeficientes de correlação linear entre as variações mensais nas estimativas directas de taxa de juro *spot* obtidas a partir da especificação de Nelson-Siegel-Svensson. Ao todo foram consideradas 76 observações, respeitantes ao período Ago-93/Set-99. Todos os prazos estão expressos em anos.

A interpretação destes valores permite-nos deduzir os seguintes comentários:

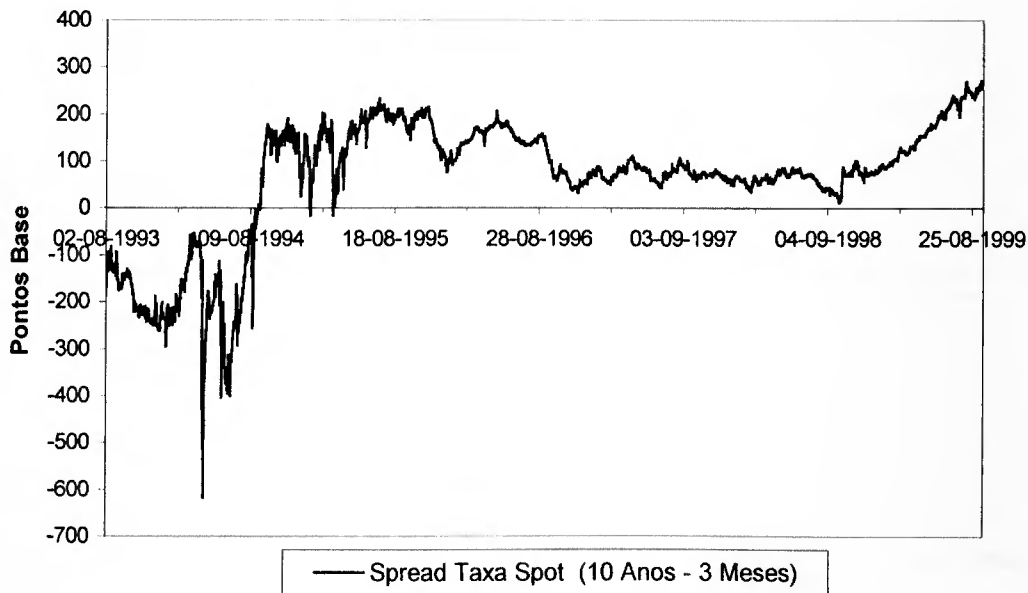
- i) O facto dos coeficientes serem elevados sugere a existência de factores comuns na explicação dos choques de taxa de juro;
- ii) O padrão de correlação claramente imperfeito denuncia, contudo, que a influência desses factores não é uniforme ao longo de toda a EPTJ, violando assim o pressuposto base de todos os modelos unifactoriais.
- iii) A dinâmica de taxas de juro é, no mercado português, conduzida por factores que não se resumem aos choques sobre o nível.

Refira-se ainda que o nível de correlação é bastante forte em segmentos próximos da EPTJ – por exemplo para as taxas com prazo de 5 e 7 anos –, mas relativamente fraco entre segmentos mais distantes – por exemplo para as taxas com prazo de 3 meses e 10 anos. Este padrão de correlação apresenta-se-nos bastante razoável, uma vez que é de esperar que uma obrigação com 3 meses para o vencimento apresente um comportamento bastante mais próximo do de uma obrigação com 6 meses de vida, do que de uma emissão com 10 anos de vida. A correlação bastante fraca entre prazos distantes merece, todavia, um comentário adicional. Com efeito, ela aparenta indicar que o impacto da actuação do Banco Central sobre os investidores que actuam no segmento longo da EPTJ é relativamente diminuto.

11.2.3. Decomposição dos Choques de Taxa de Juro

Por forma a desenvolver alguma intuição sobre o tipo de factores que comandam a dinâmica da EPTJ, representamos na figura 11.3 a evolução (diária) do *spread* entre dois dos seus pontos extremos – taxas *spot* a 3 meses e a 10 anos. Pretendemos, deste modo, obter um indicador da importância dos choques sobre a inclinação da EPTJ.

Figura 11.3: Evolução da Inclinação da Curva de Rendimentos

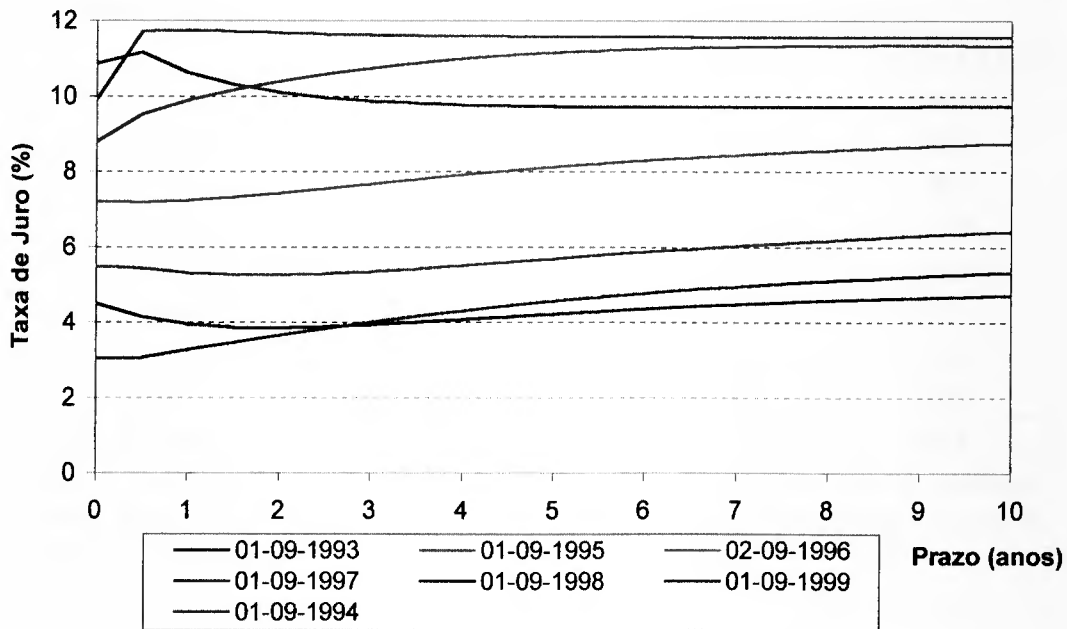


Em face deste cenário, duas conclusões resultam imediatamente. A primeira é a de que durante o período da amostra ocorreu uma clara alteração no sinal da inclinação da EPTJ, passando de uma configuração decrescente para uma configuração crescente em finais de Agosto de 1994. É assim de considerar a possibilidade do factor inclinação desempenhar um papel importante na dinâmica das taxas de juro.

A segunda conclusão a extrair é a de que, mesmo nos períodos em que existe monotonia de sinal, ocorrem alterações significativas no *grau de inclinação* da EPTJ. A título de exemplo, entre Outubro de 98 e Setembro de 99 registou-se um choque positivo sobre a inclinação (um aumento) de cerca de 250 pontos base (p.b.), uma das alterações com efeitos mais perniciosos sobre o valor de uma carteira de obrigações.

Num esforço suplementar para tentar identificar outros factores responsáveis pelo comportamento das taxas de juro, representamos na figura 11.4 alguns exemplos das múltiplas configurações assumidas pela curva de rendimentos no período da amostra.

Figura 11.4: Estruturas por Prazos de Taxa de Juro Representativas



Esta amostra é suficiente para verificar que a EPTJ pode exibir uma configuração monótona (*crescente* ou *decrecente*), tomar formas *côncavas* ou *convexas*, admitindo inclusive mais do que um ponto extremo interior. Suspeita-se assim que ao factor *curvatura* possa estar atribuído um papel importante no comportamento das taxas de juro.

Para termos mais certezas sobre o número de factores relevantes, sobre a sua importância relativa, e sobre a forma como cada um deles contribui para a explicação dos movimentos nas taxas para os diferentes prazos, recorreremos à técnica de análise de componentes principais (ACP) apresentada no ponto 7.7. Recordamos, em traços gerais, que o objectivo deste método é o de explicar o comportamento de um conjunto alargado de variáveis observáveis (choques de taxa de juro) usando um número reduzido de variáveis implícitas não observáveis (factores), independentes umas das outras. Os principais resultados da ACP efectuada com base em 8 maturidades representativas – 3 e 6 meses, 1, 2, 3, 5, 7 e 10 anos – são reportados no quadro 11.2.

Quadro 11.2: Importância Relativa dos Vários Factores para cada Prazo

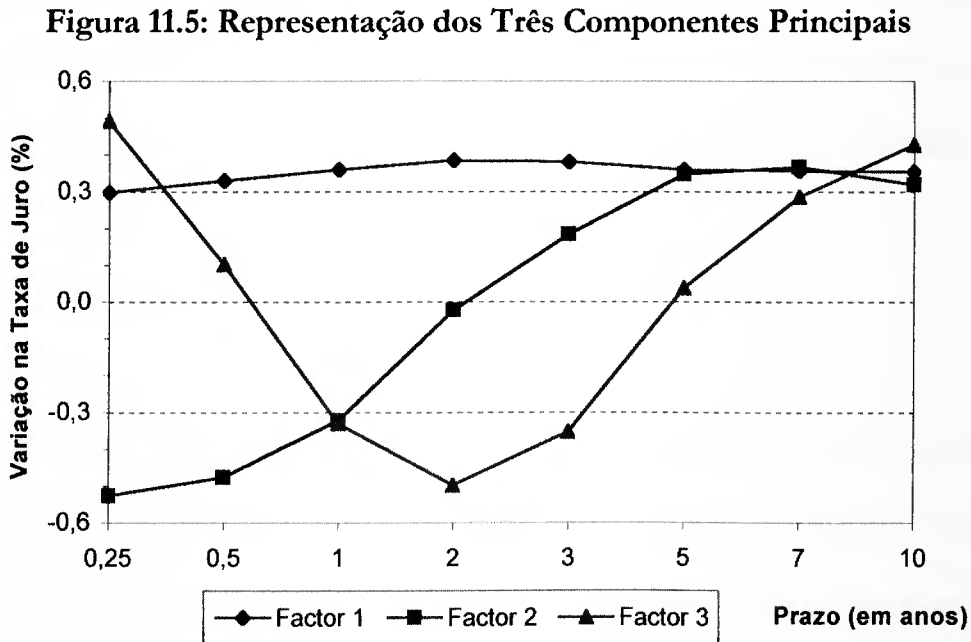
Maturidade	Proporção da Variância Total Explicada pelo(s):			
	Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factores 1,2,3
3 M	55,9	36,9	5,4	98,2
6 M	68,5	30,3	0,2	99,1
1 A	82,0	13,8	2,4	98,3
2 A	94,0	0,1	5,5	99,6
3 A	91,6	4,5	2,8	98,9
5 A	82,3	16,1	0,0	98,4
7 A	80,0	18,0	1,8	99,8
10 A	79,3	13,5	4,0	96,9
% do Total	79,2	16,7	2,8	98,6

Notas: Todos os valores se encontram em percentagem. As maturidades de referência estão expressas em meses (M) e Anos (A). A análise foi conduzida sobre a matriz de correlação apresentada no quadro 11.1, e para o período de Ago/93 a Set/99.

No quadro 11.2 efectuamos uma decomposição da variância total dos choques de taxa em termos da sua importância relativa para cada maturidade. Conforme se constata, o primeiro factor é de longe o mais importante na medida em que explica, para o conjunto dos prazos, 79,2% da variância total. Os factores 2 e 3 têm menos importância que o primeiro mas contribuem, ainda assim, para explicar 20,8% da volatilidade total. Significativo é ainda o facto dos três primeiros factores serem responsáveis por 98,6% da variância dos choques de taxa de juro, um resultado que está em linha com o observado na maioria dos estudos empíricos já realizados.

Saliente-se ainda que o primeiro factor é bastante importante (>80%) para maturidades que se situam entre 1 e 10 anos, com especial incidência (>90%) nas taxas a 2 e 3 anos. O segundo factor exerce um efeito preponderante nas taxas de curto prazo (3 e 6 meses), e bastante significativo no segmento longo (5 a 10 anos) da EPTJ, revelando no segmento intermédio (2,3 anos) um contributo insignificante. O terceiro factor assume uma importância não negligenciável, em particular nos pontos intermédios e extremos

da EPTJ. Para termos alguma intuição sobre a interpretação a dar aos três principais factores, representamos na figura 11.5 os seus coeficientes (*factor loadings*):



Constata-se assim que as variações de taxa de juro induzidas por um choque sobre o primeiro factor são aproximadamente iguais para todas as maturidades, com excepção das taxas mais curtas que são ligeiramente menos afectadas. Pensamos que é justificada a interpretação do primeiro factor como factor de nível, representando este essencialmente choques paralelos sobre a EPTJ.

A figura 11.5 mostra-nos ainda que um choque sobre o factor 2 diminui as taxas de juro com prazo até 2 anos e aumenta as taxas para prazos superiores, i.e., alterações neste factor induzem rotações na EPTJ. Não restam assim dúvidas de que este factor é responsável pelas alterações na inclinação da curva de rendimentos. O terceiro factor exerce um efeito positivo sobre as taxas situadas nos extremos da EPTJ, e um efeito negativo sobre as taxas intermédias (1 a 3 anos). Perante este padrão de choques tão nítido, é legítima a associação deste factor às modificações na curvatura da EPTJ.

Em síntese, os resultados proporcionados pela ACP permitem-nos concluir que a quase totalidade da volatilidade das taxas de juro é explicada por apenas três factores, a saber: choques sobre o nível, choques sobre a inclinação, e choques sobre a curvatura da EPTJ. Não obstante os choques sobre o nível assumam um papel primordial, não devemos menosprezar a importância das oscilações na inclinação e na curvatura.

11.2.4. Dinâmica dos Choques de Taxa de Juro

Como vimos no capítulo 7, os factores identificados pela ACP são, por construção, variáveis aleatórias mutuamente independentes entre si. Deste ponto vista, a tentação imediata será a de considerar que os três factores antes identificados como responsáveis pela explicação da volatilidade das taxas de juro são não correlacionados. Contrariando esta percepção, os estudos empíricos realizados por Jones (1991) e Ilmanen e Iwanowski (1997), entre outros, vieram demonstrar que os três principais tipos de choques sobre a EPTJ não são independentes. Jones (1991) conclui, por exemplo, que os dois tipos de choques mais frequentes correspondem: (i) a uma diminuição do nível de taxas de juro acompanhada de um aumento na inclinação da EPTJ, (ii) a um aumento do nível de taxas de juro combinado com uma redução da inclinação da EPTJ.

Em face destes resultados, seguimos Barrett *et. al.* (1995) e utilizámos os coeficientes da regressão de Nelson-Siegel-Svensson (NSS) para tentar identificar alguns factos estilizados no comportamento dinâmico dos choques de taxa de juro. O quadro 11.3 apresenta o resumo dos resultados da estimação da equação (7.59) para todas as observações que compõem a amostra.

Quadro 11.3: Resultados da Estimação da Equação de Nelson-Siegel-Svensson

A – Principais Indicadores Estatísticos

	β_0	β_1	β_2	β_3	τ	θ
Média	8,67	-1,54	-2,85	1,41	1,69	0,06
Desvio Padrão	2,40	1,50	3,94	6,01	1,04	0,15
Assimetria	-0,07	2,02	-2,65	13,95	3,14	4,07
Curtose	-1,37	15,01	19,02	337,06	25,31	20,88
Mínimo	4,77	-8,43	-40,18	-45,14	0,01	0,00
Máximo	15,41	16,61	13,76	160,93	12,68	1,43

B – Tendências Estatísticas - Percentagem do Tempo em que:

		β_1	β_2	β_3
Valor	Positivo	13,1	14,9	31,3
	Negativo	86,9	85,1	3,9
	Nulo	0,0	0,0	64,8

$\beta_1 > 0$		$\beta_1 < 0$	
$\beta_2 > 0$	$\beta_2 < 0$	$\beta_2 > 0$	$\beta_2 < 0$
0,7	12,4	14,2	72,7

$\beta_1 > 0$			$\beta_1 < 0$		
$\beta_3 > 0$	$\beta_3 < 0$	$\beta_3 = 0$	$\beta_3 > 0$	$\beta_3 < 0$	$\beta_3 = 0$
7,5	0,4	5,3	23,8	3,5	59,5

Notas: Os indicadores estatísticos reportados foram calculados com base numa amostra total de 1522 observações diárias, compreendidas entre Ago/93 e Set/99. Todos os valores estão em percentagem, excepto os parâmetros τ e θ que são medidos em anos.

Com base nesta informação é possível retirar, desde já, duas conclusões importantes: (i) em 86,9% das observações o coeficiente β_1 é negativo, ou seja, na maioria dos casos a EPTJ exibe uma inclinação positiva; (ii) o parâmetro β_2 , um indicador da curvatura da EPTJ, é negativo em 85,1% dos dias, ou seja, a EPTJ assume preponderantemente a forma convexa. O cruzamento deste dado com o valor normalmente assumido por β_1 permite-nos deduzir então que a EPTJ exibe, na maioria dos casos (72,7%), uma tendência crescente e uma configuração convexa.³⁷¹ A presença de um segundo ponto extremo ($\beta_3 \neq 0$) é registada em 35,2 % dos dias, sendo que esse ponto extremo ocorre no segmento de muito curto prazo da EPTJ e é maioritariamente um máximo ($\beta_3 > 0$).

(371) A forma assumida pela curva de rendimentos nos dias 1/9/1997 e 1/9/1998 (representadas na figura 11.4) constitui um bom exemplo desta configuração tipo.

O quadro 11.4 fornece uma panorâmica sobre a correlação histórica dos principais tipos de choque de taxa de juro. É bem patente a existência de uma correlação negativa entre o nível de taxas de juro e os indicadores de inclinação e curvatura da EPTJ.

Quadro 11.4: Matriz de Correlação Entre os Choques Sobre o Nível, Inclinação, e Curvatura da EPTJ

	β_0	β_1	β_2	β_3
β_0	1	-0,19	-0,49	0,30
β_1		1	-0,39	-0,08
β_2			1	-0,54
β_3				1

Notas: Os valores indicados no quadro correspondem aos coeficientes de correlação linear entre as variações mensais nas estimativas dos parâmetros β_0 (nível), β_1 (inclinação), β_2 e β_3 (curvatura) da equação de Nelson-Siegel-Svensson, referentes ao período Ago/93 – Set/99.

Significativa é ainda a relação (negativa) entre os choques sobre a inclinação e as alterações na curvatura. Para melhor compreendermos o comportamento dinâmico da curva de rendimentos, repartimos os dados da amostra segundo o valor assumido pela taxa de juro de longo prazo. São constituídos três segmentos, compreendendo valores elevados, intermédios e reduzidos para o parâmetro β_0 . Os extremos destes intervalos foram escolhidos de modo a que o número de observações neles contido fosse aproximadamente igual. O Anexo 5 exhibe os resultados deste procedimento.

Com base nesta análise é possível constatar que o valor médio do parâmetro de inclinação é tanto mais negativo (e mais preponderante) quanto mais baixo for o nível de taxas de juro, confirmando de algum modo as suspeitas avançadas no quadro 11.4 segundo as quais o movimento de descida das taxas de juro é acompanhado de um aumento da inclinação da EPTJ. Este resultado atesta ainda a nossa convicção, presente na figura 11.2, de que as taxas de juro de longo prazo são, regra geral, menos voláteis.

De acordo com as tradicionais teorias para a EPTJ, a inclinação reflecte no essencial as expectativas de mercado dos agentes e os prémios de risco (e/ou liquidez) desejados. O aumento da inclinação da curva de rendimentos para valores mais baixos do nível de taxas pode indiciar uma expectativa de subida acentuada nas taxas de juro, prémios de risco (ou liquidez) especialmente elevados, ou uma combinação de ambos os factores.³⁷²

Os dados históricos deixam ainda perceber que a forma convexa da EPTJ é tanto mais frequente (até se tornar quase exclusiva) quanto menor for o valor da taxa de juro de longo prazo (embora o valor médio do coeficiente β_2 seja especialmente significativo no segmento intermédio), e quanto mais predominante se revelar a natureza ascendente da EPTJ.

Por último, a análise das tendências estatísticas confirma que a forma côncava apenas têm expressão para valores elevados do coeficiente β_0 , e nos casos em que a curva de rendimentos tem inclinação negativa. A presença de um segundo ponto extremo (preferencialmente um máximo) é especialmente notada e significativa para valores elevados de β_0 .³⁷³

(³⁷²) A relação inversa entre o nível de taxas de juro e a inclinação da EPTJ é justificada por Van Horne (1965) com base em evidência empírica que sustenta a existência de uma relação negativa entre os prémios de risco e o nível de taxas de juro. Segundo este autor, os investidores antecipam as perdas (ganhos) de capital esperadas em resultado de aumentos (diminuições) no nível de taxas de juro concentrando os seus investimentos em títulos de curto (longo) prazo. Este reposicionamento da procura implica contudo, e no imediato, um(a) aumento (diminuição) nos preços dos títulos de curto prazo, e uma redução (aumento) nos preços dos títulos de longo prazo. Estas alterações traduzem-se, obviamente, em diminuições (aumentos) nas taxas de juro de curto prazo e em aumentos (diminuições) nas taxas “longas”. Em suma, o alargamento (estreitamento) do diferencial de taxas que daqui decorre configura, segundo o autor, um(a) aumento (diminuição) nos prémios de risco exigidos pelo mercado. A dedução de uma interpretação mais adequada para esta regularidade empírica exige, em nosso entender, um estudo mais aprofundado, que excede em muito o âmbito deste trabalho.

(³⁷³) Cálculos efectuados (mas não reportados) indicam ainda que na maioria dos casos os dois parâmetros de curvatura (β_2 e β_3) exibem sinais contrários.

Segundo Ilmanen e Iwanowski (1997), a curvatura da EPTJ é determinada primariamente por três factores: pelas expectativas de alteração na configuração da EPTJ, pelas expectativas de alteração na volatilidade e pela estrutura de retorno esperado dos títulos. Com base neste fio condutor, esboçamos uma primeira interpretação para a forma predominantemente ascendente e convexa da EPTJ.

A forte relação entre o nível e a volatilidade das taxas de juro encontrada por Ferreira (1998) pode, e deve, servir de base à construção de uma explicação sustentada para a forma maioritariamente convexa da EPTJ. No capítulo 6 provámos que as expectativas de acréscimo (decrécimo) na volatilidade aumentam (diminuem) o valor da convexidade e tendem a beneficiar (prejudicar) posições imunizadas (i.e., respeitando a habitual restrição de duração) com valores elevados para o M^2 (posições longas em carteiras do tipo *barbell*), relativamente a posições curtas do tipo *bullet*. Neste sentido, em períodos de elevada volatilidade é de esperar que para compensar a natureza desejável da convexidade as posições do tipo *barbell* ofereçam uma desvantagem inicial em termos de retorno, daqui resultando uma configuração côncava para a EPTJ.

Segundo Ferreira (1998), e como vimos na figura 11.2, os períodos de reduzida volatilidade estão, em Portugal, fortemente ligados a níveis baixos de taxa de juro. Acresce que, como vimos no quadro 11.4, essa redução do nível de taxa de juro é acompanhada de um aumento na inclinação da EPTJ. Conjugando estas informações, se a redução da volatilidade retira, por si só, grande parte da natureza desejável à convexidade, o aumento da inclinação da EPTJ que lhe está (indirectamente) associado torna-a, de acordo com os ensinamentos da visão moderna do fenómeno (avanzados no capítulo 6), inclusive indesejável. Daqui decorre que as posições do tipo *barbell*

devem oferecer aos investidores uma vantagem inicial em termos de retorno, donde se espera uma configuração convexa para a EPTJ. Esta argumentação encontra, em nosso entender, algum fundamento, uma vez que como afirmámos anteriormente a forma ascendente e convexa da EPTJ é tanto mais preponderante quanto menor for o nível de longo prazo das taxas de juro.³⁷⁴ A validação empírica deste argumento constitui, não obstante, motivo para investigação futura.

11.3. Descrição da Amostra de Obrigações do Tesouro (OT's)

Na elaboração deste estudo foram utilizados dados referentes a 25 empréstimos obrigacionistas de taxa fixa, activamente transaccionados no Mercado de Cotações Oficiais – Sistema de Negociação em Contínuo – da Bolsa de Valores de Lisboa e Porto (BVLTP). O **Anexo 6** resume as características técnicas das obrigações que compõem a amostra. Nenhuma das emissões incorpora qualquer tipo de opção implícita, constituindo assim aquilo que mais se aproxima de um activo sem risco de incumprimento. Os diferenciais de taxa de cupão presentes nesta amostra constituem um teste adicional à performance da estratégia de imunização.

⁽³⁷⁴⁾ A inclusão do fenómeno de reversão à média das taxas de juro na construção de uma explicação alternativa para a forma predominante da EPTJ produz conclusões perfeitamente contrárias às desejadas. Com efeito, se acreditarmos que o fenómeno está, de facto, presente no comportamento das taxas de juro em Portugal (e nas expectativas dos agentes), a antecipação de um choque positivo sobre o nível, acompanhado de uma redução na inclinação e na curvatura da EPTJ, tenderá a beneficiar posições imunizadas (i.e., respeitando a habitual restrição de duração) com valores elevados para o M^2 e para a convexidade (posições longas em carteiras do tipo *barbell*), relativamente a posições curtas do tipo *bullet*. Neste sentido, aquilo que se esperaria era que a EPTJ tomasse preferencialmente a forma côncava, i.e., oferecesse uma desvantagem inicial em termos de TRA às posições do tipo *barbell*, na expectativa de que esta fosse compensada pelos lucros esperados de uma horizontalização (e redução da curvatura) da EPTJ. Ora o estudo recentemente conduzido por Ferreira (1998), com vista a determinar a especificação mais adequada para o processo estocástico seguido pelas taxas de juro de curto prazo, indica contudo não existir uma evidência suficientemente forte que sustente a presença do fenómeno de reversão à média.

A primeira etapa no tratamento dos dados consistiu na recolha, junto do sistema DATHIS da BVLP, do valor de cotação (B_{cot}) de todas as OT's que integram o estudo, em todas as datas de constituição (e reajustamento) da carteira. Seguindo a prática habitual, usámos como preço de referência a cotação de fecho de cada título.³⁷⁵ A reduzida liquidez do mercado português tem como reflexo o facto de em muitos dias não se realizar qualquer negócio. Quando tal aconteceu, optámos por considerar como preço a média aritmética entre os valores das ofertas de compra e de venda ou, no caso mais remoto de existir apenas um valor de referência, uma das ofertas.

Os valores de cotação publicados pela BVLP correspondem aos denominados *clean prices* e não incluem o juro corrido desde a data de pagamento do último cupão. Assim, o passo seguinte consistia na determinação do valor de transacção (B) de cada título, adicionando ao valor de cotação os respectivos juros corridos (J_c):

$$B = B_{cot} + J_c, \text{ com } J_c = B_T \times c\% \times \Theta$$

onde B_T representa o valor nominal do título, $c\%$ designa a taxa de cupão, e Θ simboliza a fracção de tempo (medida em anos) decorrida desde o pagamento do último cupão até à data de liquidação da transacção. A contagem do número de dias corridos entre datas de pagamento de cupão foi feita com base no ano comercial de 360 dias.³⁷⁶ A presença de características friccionais no mercado (fiscalidade, custos de transacção, lotes mínimos, inflação, etc.) foi negligenciada.

(³⁷⁵) A solução alternativa, adoptada por exemplo por Nawalkha e Chambers (1996;1997), consiste em usar preços teóricos para as obrigações, construídos a partir das estimativas de taxas *spot*.

(³⁷⁶) Refira-se a propósito que as regras de liquidação financeira das operações na bolsa portuguesa se alteraram duas vezes no período da amostra. Com efeito, até ao dia 23 de Maio de 1994 a liquidação financeira ocorria no mesmo dia da transacção. A partir de então, e até ao dia 2 de Novembro de 1998, a liquidação passou a ser feita ao 4º dia útil seguinte ao da transacção. O sistema em vigor a partir dessa data estipula a liquidação no 3º dia útil após a realização da transacção.

11.4. Metodologia de Construção dos Testes de Imunização

11.4.1. Critérios Subjacentes à Delimitação do Horizonte Temporal de Investimento e da Periodicidade de Reajustamento da Carteira

A primeira etapa a observar na construção dos testes de imunização consistiu na definição de um horizonte temporal de investimento (HTI) adequado. Dois factores condicionavam à partida este processo: (i) a (relativamente) curta dimensão da amostra³⁷⁷, que compreendia dados de taxa de juro e valores de cotação para o período de Ago/93 a Set/99, e que permitia desenhar estratégias com um HTI máximo de 6 anos; (ii) a natureza de longo prazo da estratégia de imunização, que desaconselhava a opção por um HTI demasiado curto.

Posto isto, e por forma a realizar um número mínimo de simulações que desse consistência aos resultados obtidos, optámos por definir um HTI único de 4 anos, possibilitando assim a efectivação de 26 simulações sobrepostas³⁷⁸ recomeçando, cada uma, no mês seguinte ao início da simulação imediatamente anterior.³⁷⁹ Todas as simulações têm início no primeiro dia útil de cada mês.

A segunda opção a tomar respeitava ao período de tempo que deveria mediar entre momentos de reajustamento da composição da carteira. Conforme salientámos nos

(³⁷⁷) Quando comparada, obviamente, com mercados mais desenvolvidos onde é possível simular estratégias de imunização com HTI de 5, 10, 20 e mais anos.

(³⁷⁸) Apesar de esta solução ser frequentemente adoptada em estudos de imunização, reconhecemos obviamente que a utilização de períodos sobrepostos não respeita a desejável propriedade de independência estatística das observações. Contamos realizar no futuro, assim que a dimensão da amostra o permitir, um teste à independência temporal do modelo *M-Vector*.

(³⁷⁹) Por exemplo, a primeira simulação tem início em Agosto de 1993 e termina em Agosto de 1997. A segunda tem início em Setembro de 1993 e termina em Setembro de 1997, e assim sucessivamente, até à vigésima sexta simulação que tem início em Setembro de 1995 e final em Setembro de 1999.

capítulos precedentes, a ocorrência de choques de taxa de juro, o pagamento de cupões, ou até a simples passagem do tempo são suficientes para desviar o valor das medidas de risco de taxa de juro do seu valor objectivo.

No capítulo 4 referenciámos um conjunto de estudos empíricos que atestavam um claro conflito entre a melhoria da eficácia da estratégia de imunização e o valor dos custos de transacção, em consequência do aumento da periodicidade de reajustamento da carteira. Apesar de este último aspecto não ser directamente contemplado neste trabalho, não foi ignorado e condicionou de, certa forma, a decisão tomada. Deste modo, a opção pelo realismo recaiu na realização de reajustamentos numa base semestral e anual.³⁸⁰

11.4.2. Definição das Estratégias de Imunização com Base no Modelo *M-Vector*

Para testar a performance dos modelos multifactor e determinar a dimensão óptima do vector de medidas de risco de taxa de juro, são efectuados testes de imunização usando do modelo *M-Vector* descrito no capítulo 7. Assim, no início de cada uma das 26 simulações são desenhadas 7 estratégias de imunização correspondendo, cada uma delas, a uma formulação do problema de imunização definido em (7.55) considerando o vector de medidas de risco de taxa de juro – *M-Vector* – com a dimensão adequada. O quadro 11.5 sintetiza as características dessas estratégias.

⁽³⁸⁰⁾ A opção de não considerar intervalos mais curtos entre períodos de reajustamento da carteira é reforçada pelos resultados surpreendentes obtidos no estudo de Pereira e Cassola (1998), onde se constata que o desempenho da estratégia de imunização é tanto melhor quanto mais longo é o intervalo de tempo entre reajustamentos. Mais adiante teremos oportunidade de verificar que as conclusões do nosso estudo corroboram esta opinião.

Quadro 11.5: Características das Estratégias de Imunização Multifactor

Designação da Estratégia	Imunização com respeito a ...	Restrições Relevantes
$M(1)$	Primeiro elemento do <i>M-Vector</i> , ou com respeito à duração de Fisher-Weil	$M^1 = 0$
$M(2)$	Primeiros 2 elementos do <i>M-Vector</i>	$M^m = 0$, $m = 1,2$
$M(3)$	Primeiros 3 elementos do <i>M-Vector</i>	$M^m = 0$, $m = 1,2,3$
$M(4)$	Primeiros 4 elementos do <i>M-Vector</i>	$M^m = 0$, $m = 1,2,...,4$
$M(5)$	Primeiros 5 elementos do <i>M-Vector</i>	$M^m = 0$, $m = 1,2,...,5$
$M(6)$	Primeiros 6 elementos do <i>M-Vector</i>	$M^m = 0$, $m = 1,2,...,6$
$M(7)$	Primeiros 7 elementos do <i>M-Vector</i>	$M^m = 0$, $m = 1,2,...,7$

Conforme se verifica, as restrições de imunização para cada estratégia dependem da dimensão do vector adoptada.³⁸¹ A minimização da função objectivo definida em (7.55) é conseguida usando a habitual técnica *Lagrangeana*. A implementação do modelo *M-Vector* envolve a inclusão de posições negativas na carteira.

O procedimento de construção das carteiras é repetido em cada um dos momentos de reajustamento, atendendo ao novo valor das medidas de risco de taxa de juro, ao valor de mercado do investimento, e às novas emissões entretanto admitidas à cotação. Os cupões gerados por cada estratégia são nela reinvestidos, na data de reajustamento que se situa imediatamente após o seu recebimento. No final de cada HTI todas as carteiras são liquidadas a valores de mercado.

11.4.3. Estratégias de Controlo

No sentido de avaliar a eficácia relativa das estratégias de imunização com base no modelo multifactor, simulámos o desempenho de três estratégias de investimento habitualmente usadas como *benchmark*. A primeira, que designaremos por *estratégia de*

(381) Por exemplo, a estratégia $M(2)$ selecciona a proporção a investir em todas e cada uma das obrigações disponíveis num determinado momento de modo a igualar o valor das medidas M^1 e M^2 a zero, e por forma a que a soma das proporções investidas nos títulos totalize a unidade.

maturidade, implica a escolha das duas obrigações que, em cada momento, tem vencimento mais próximo do HTI (imediatamente antes e depois), com a condição de que a maturidade da carteira assim formada seja igual ao tempo remanescente para o fim do HTI. Não são admitidas posições negativas.³⁸²

A segunda estratégia de controlo, que designaremos por *Maturity-Bullet*, resulta da combinação da obrigação que em cada momento têm maturidade mais próxima do HTI (mas com duração de Fisher-Weil ligeiramente inferior à duração objectivo) com a obrigação cuja duração mais se aproxima (mas excede) o HTI. A duração da carteira é igualada ao HTI, e não são admitidas posições negativas.

A terceira alternativa testada, designada por estratégia *Maturity-Barbell*, difere da anterior apenas na medida em que inclui, para além da obrigação com maturidade mais próxima do HTI, a obrigação que, em cada momento, tem o vencimento mais distante de entre todas as que estão admitidas à cotação. A duração da carteira é igualada ao HTI, e não são admitidas posições negativas. Os cupões pagos por cada uma destas três estratégias são nelas reinvestidos, na data de reajustamento imediatamente após o seu recebimento.

Com a inclusão destas duas estratégias adicionais pretendemos confirmar empiricamente o argumento, sugerido pelos estudos de Fooladi e Roberts (1992) e Bierwag *et al.* (1993), entre outros, de que a estratégia de imunização que inclui uma obrigação com maturidade igual ao HTI exhibe uma supremacia relativamente às demais

(382) Esta estratégia serve, desde os trabalhos de Fisher e Weil (1971), como base de comparação em estudos de imunização, e constitui uma aproximação ao activo ideal – uma obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTI – na medida em que elimina uma das componentes do risco de taxa de juro – o risco de preço. Ignora, contudo, a exposição gerada pelo pagamento dos cupões.

estratégias que satisfazem a restrição de duração. Especial atenção será então dedicada à comparação do seu desempenho com o proporcionado pela estratégia $M(1)$.

11.4.4. Indicadores de Desempenho

Para aferir o desempenho das 10 estratégias de investimento são usados dois conjuntos de indicadores: (i) *medidas de risco*, que atestam o desvio do retorno gerado pela estratégia face ao valor objectivo; e (ii) *indicadores de rendibilidade*, que fornecem uma visão mais ampla dos resultados. O primeiro indicador de risco reportado, conhecido na literatura por *Root Mean Squared Differences (RMSD)*, configura uma medida do grau de dispersão (semelhante ao desvio padrão) da taxa de retorno realizada (TRR) por cada estratégia relativamente à taxa de retorno esperada (TRE) de uma estratégia de imunização. O seu valor é calculado mediante:

$$RMSD = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (TRR_t - TRE_t)^2}$$

onde N denota o número de simulações realizadas em cada uma das modalidades de reajustamento, e onde a diferença $(TRR - TRE)$ é medida em pontos base. A TRE é definida como a taxa de retorno correspondente ao investimento de uma unidade monetária numa obrigação de cupão zero com maturidade igual ao HTI, e é calculada a partir das estimativas de taxa de juro *spot* fornecidas pela equação de NSS. Tratando-se de uma medida de dispersão, quanto menor for o valor da $RMSD$ tanto mais eficaz será a estratégia de investimento.

A hierarquização das estratégias de investimento com base na medida $RMSD$ pode conduzir a conclusões que são contrárias ao espírito da estratégia de imunização, por

duas ordens de razões. A primeira está relacionada com a existência de desvios considerados anormais (*outliers*). A segunda, mais importante, refere-se à possibilidade da distribuição dos desvios não ser simétrica, condição suficiente para que a estratégia que apresenta menores desvios quadráticos não seja aquela revela melhor desempenho no cumprimento (ou na superação) do objectivo.

A estratégia de imunização é, na sua essência, uma estratégia passiva que visa garantir a obtenção de um determinado retorno, mesmo nas situações em que ocorrem choques adversos nas taxas de juro. Compreende-se, assim, que a verdadeira preocupação do investidor esteja centrada na probabilidade de obter retornos inferiores aos esperados, e não tanto na obtenção de retornos superiores. Com o intuito de avaliar a importância destes efeitos, calculámos um segundo indicador de dispersão - *Root Fishburn Risk Measure (RFRM)* -, uma variante³⁸³ da medida proposta originalmente por Fishburn (1977) para medir do risco de perda. O seu valor é determinado mediante:

$$RFRM = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{TRR_t \leq TRE_t} (TRR_t - TRE_t)^2}$$

onde o somatório é agora efectuado apenas nos casos em que a desigualdade $TRR \leq TRE$ é verdadeira. Um valor mais reduzido para a estatística *RFRM* é sinónimo de uma estratégia de imunização mais eficaz.

Por construção, a volatilidade da estratégia de imunização em torno da *TRE* atinge o valor mínimo (o valor nulo) no final do HTI. Para confirmar esta previsão, e avaliar o desempenho das estratégias ao longo do horizonte de investimento, seguimos a pista

(³⁸³) A única diferença relativamente à formulação original refere-se ao facto de nesta os desvios quadráticos serem ponderados, não de forma igual ($1/N$), mas de acordo com a sua probabilidade de ocorrência.

lançada por Langetieg *et al.* (1990) e calculámos o valor das estatísticas *RMSD* e *RFRM* em todas as datas de reajustamento da carteira (incluindo a data de liquidação). Para completar o rol de indicadores de risco reportamos ainda: (i) os desvios máximo e mínimo da *TRR* face à *TRE*, (ii) a soma dos desvios (absolutos e negativos), e (iii) os indicadores de enviesamento e achatamento (curtose) da distribuição. No que toca aos indicadores de rendibilidade, são usados os seguintes: (i) desvio médio da *TRR* face à *TRE*; (ii) percentagem do número total de simulações em que a *TRR* foi superior à *TRE*.

11.5. Análise dos Resultados

Os principais resultados obtidos nos testes de imunização considerando reajustamentos anuais³⁸⁴ são apresentados no quadro 11.6. Numa tentativa de sistematizar as conclusões deste estudo tentaremos dar resposta às seguintes questões:

- i) Os modelos de imunização contribuem (ou não) para a redução do risco de taxa de juro subjacente a uma convencional estratégia de maturidade? Em caso afirmativo, qual é a importância destes ganhos?
- ii) A evidência empírica confirma, ou não, a superioridade teórica dos modelos multifactor relativamente aos tradicionais modelos de factor único?
- iii) Qual é a dimensão óptima do modelo *M-Vector*?
- iv) Qual é o melhor modelo do ponto de vista do binómio risco/retorno?
- v) A inclusão de uma obrigação com maturidade próxima do HTI nas tradicionais estratégias de imunização melhora ou não a sua eficácia?
- vi) Qual é o desempenho das estratégias ao longo do HTI?
- vii) Existem ou não ganhos com o aumento da periodicidade de reajustamento?

⁽³⁸⁴⁾ Os resultados obtidos considerando reajustamentos semestrais fazem parte do Anexo 7.

Quadro 11.6: Principais Resultados dos Testes de Imunização Considerando Reajustamentos Anuais

	Média TRE (%)	TRR - TRE (em pontos base)					RMSD	RFRM	Soma dos Desvios		
		% Pos.	Média	Assimetria	Curtose	Máximo			Mínimo	ABS	NEG
Estratégias de controle											
Maturidade	10,65	7,7	-90	0,58	-0,86	36	-161	107,3	107,1	2.442	-2.397
Maturity-Bullet	10,65	0,0	-58	-0,92	2,67	-7	-150	65,1	65,1	1.519	-1.519
Maturity-Barbell	10,65	11,5	-71	0,63	0,10	30	-142	82,5	82,5	1.931	-1.883
Modelo M-Vector											
M(1)	10,65	0,0	-99	-0,08	-0,48	-45	-155	102,7	102,7	2.572	-2.572
M(2)	10,65	38,5	-11	-0,44	-0,60	30	-65	28,2	26,0	582	-432
M(3)	10,65	34,6	-9	-0,96	2,81	33	-88	26,4	24,1	522	-382
M(4)	10,65	11,5	-18	-2,35	9,19	18	-105	28,5	28,2	533	-504
M(5)	10,65	0,0	-33	-3,88	17,55	-1	-189	47,3	47,3	856	-856
M(6)	10,65	23,1	-17	1,32	2,45	56	-62	30,8	27,0	685	-562
M(7)	10,65	15,4	-14	1,19	0,74	65	-59	37,1	29,3	821	-591

Notas: Todos os valores apresentados estão expressos em pontos base, excepto aqueles que se referem à média da TRE e à percentagem do número total de simulações em que a TRR foi superior à TRE que se encontram em percentagem. No total foram realizadas 26 simulações para cada um dos modelos, considerando horizontes temporais de investimento de 4 anos.

- Legenda:
- Média TRE

% Pos

Soma dos Desvios (ABS)

Soma dos Desvios (NEG)
- Média das TRE para o conjunto das 26 simulações

- Percentagem do número total de simulações em que a TRR foi superior à TRE

- Soma dos desvios absolutos da TRR relativamente à TRE

- Soma dos desvios da TRR relativamente à TRE com sinal negativo

Os resultados dos testes confirmam, em primeiro lugar, que *todos os modelos de imunização analisados reduzem o risco de taxa de juro subjacente a uma convencional estratégia de maturidade*. O quadro 11.7 apresenta a percentagem do risco (medido pelo RMSD) da estratégia de maturidade que é reduzido por cada um dos restantes modelos.

Quadro 11.7: Risco dos Modelos de Imunização face à Estratégia de Maturidade

Estratégias	Periodicidade Reajustamento	
	Anual	Semestral
Maturity-Bullet	39,4	35,7
Maturity-Barbell	22,9	27,7
M(1)	4,3	14,7
M(2)	73,7	66,9
M(3)	75,4	67,3
M(4)	73,5	63,1
M(5)	55,9	51,7
M(6)	71,3	53,3
M(7)	65,4	34,3

Notas: Os valores indicados estão expressos em percentagem, e são calculados subtraindo à unidade o resultado da divisão do RMSD das estratégias de imunização pelo RMSD da estratégia de maturidade.

Conforme se antevia, a estratégia de maturidade apresenta os piores índices de risco de taxa de juro de entre todas as estratégias analisadas. Em comparação com esta, todas as estratégias de imunização registam ganhos de eficácia, que oscilam entre um mínimo de 4,3% (ou 4,6 pontos base) para o modelo de duração de Fisher-Weil, e um máximo de 75,4% (ou 81,0 p.b.) para o modelo *M-Vector* considerando os três primeiros elementos do vector de medidas de risco de taxa de juro.

Apesar do desempenho absoluto da estratégia de maturidade não poder ser, de modo algum, desvalorizado, a verdade é que estes resultados são significativos e afiançam a nossa convicção de que a utilização de modelos de risco de taxa de juro cada vez mais sofisticados aproxima, consideravelmente, as performances das estratégias de imunização e do activo ideal.

Em segundo lugar, o desempenho do modelo de imunização de factor único testado (*Modelo de Duração de Fisher e Weil*, desenhado segundo três critérios distintos de construção da carteira imunizadora) foi claramente suplantado pela performance do modelo multifactor. O quadro 11.8 apresenta a percentagem do risco (medido pelo RFRM) das estratégias de imunização de factor único que é reduzido pelas várias versões do modelo *M-Vector*.

Quadro 11.8: Risco dos Modelos de Imunização de Factor Único face ao Modelo Multifactor

Estratégia	M(1)	Maturity-Bullet	Maturity-Barbell
M(2)	74,7	60,0	68,5
M(3)	76,6	63,0	70,9
M(4)	72,6	56,7	65,9
M(5)	54,0	27,3	42,7
M(6)	73,7	58,5	67,2
M(7)	71,5	54,9	64,5

Notas: Os valores indicados estão expressos em percentagem e referem-se às simulações realizadas com *reajustamento anual*. São calculados subtraindo à unidade o resultado da divisão do RFRM da estratégia indicada em linha, pelo RFRM da estratégia indicada em coluna.

Como se observa, a pior das versões do modelo *M-Vector* [*M(5)*] reduz em 54% o risco da estratégia *M(1)*, em 27,3% o risco da estratégia *Maturity-Bullet* (M-Bu) e em 42,7% o risco da estratégia *Maturity-Barbell* (M-Ba). A melhor das versões do modelo multifactor [*M(3)*] elimina aproximadamente 77%, 63% e 71% das estratégias *M(1)*, M-Bu, e M-Ba, respectivamente.

A terceira conclusão importante é a de que a *adição indiscriminada de elementos ao vector de medidas de risco de taxa de juro do modelo M-Vector*, para além de um determinado nível óptimo, não melhora o desempenho da estratégia de imunização e pode, inclusive, piorá-lo. Dito de outro modo, não existe uma relação monótona entre a adição de restrições de imunização ao modelo *M-Vector* e a eficácia da estratégia.

Este comportamento era, de certa forma, esperado, na medida em que a adição de restrições ao problema de imunização exerce, pela própria natureza da função objectivo usada em (7.55), dois efeitos antagónicos. O primeiro, benéfico, corresponde ao aumento do grau de protecção face aos diferentes tipos de choque de taxa de juro. O segundo, prejudicial, manifesta-se na aceitação de um valor óptimo menos desejável para a função objectivo, ou seja, na sujeição dos retornos da carteira a uma maior dispersão, com o inerente menor aproveitamento dos benefícios da diversificação.

Da combinação destes dois efeitos contrários deve resultar um ponto de equilíbrio entre os benefícios de uma imunização mais abrangente e as desvantagens de uma carteira menos diversificada. O quadro 11.9 pretende facilitar a identificação da dimensão óptima do modelo *M-Vector*.

Quadro 11.9: Dimensão Óptima do Modelo *M-Vector*

Estratégia	TRR-TRE	RMSD	RFRM
M(1)	-89,6	76,3	78,7
M(2)	-1,5	1,8	2,0
M(4)	-9,0	2,1	4,1
M(5)	-23,6	20,9	23,3
M(6)	-7,6	4,4	3,0
M(7)	-4,5	10,8	5,3

Notas: Os valores exibidos correspondem, para os três indicadores, à diferença entre cada um dos modelos e a estratégia óptima M(3). Valores negativos na coluna (TRR-TRE) indicam a dimensão da superioridade da estratégia M(3) em termos de rentabilidade. Valores positivos nas colunas RMSD e RFRM sugerem que a estratégia M(3) é menos arriscada. A unidade de medida é o ponto base.

Embora seguida de muito perto pela estratégia *M(2)*, a estratégia *M(3)* é, segundo todos os indicadores de risco e retorno utilizados, aquela que apresenta melhores resultados. Conjugando este dado com a tipo de choque (definido na equação (7.51)) associado a cada um dos elementos que integra o *M-Vector*, é possível deduzir a seguinte argumentação: a melhor estratégia é aquela que imuniza simultaneamente a carteira contra choques sobre o nível, choques sobre

a inclinação e choques sobre a curvatura da EPTJ]. Estes resultados não surpreendem dado que confirmam as suspeitas lançadas no ponto 11.2.3 pela ACP.

A estratégia M(3) revela, no binómio risco/retorno, o melhor desempenho entre todas as estratégias analisadas. Deve salientar-se, contudo, que o desempenho do melhor modelo é acompanhado de muito perto pela estratégia M(2).³⁸⁵ O quadro 11.10 apresenta um ranking para os melhores modelos de imunização.

Quadro 11.10: Ranking dos Melhores Modelos de Imunização

Horizonte Reajustamento	Estatística	Ranking			Distância	
		1º	2º	Pior	1º - 2º	1º - Pior
Anual	RFRM	M(3)	M(2)	Matur	1,9	83,0
	TRR-TRE	M(3)	M(2)	M(1)	2,0	90,0
Semestral	RFRM	M(3)	M(2)	Matur	2,1	78,2
	TRR-TRE	M(3)	M(2)	Matur	4,0	74,5

Nota: A unidade de medida é o ponto base.

Entre as conclusões do nosso estudo encontra-se ainda a evidência de que a tradicional estratégia de imunização não é insensível ao critério de formação da carteira imunizadora. Como é bem patente no quadro 11.11, a simples inclusão de uma obrigação com maturidade próxima do HTI é suficiente para melhorar protecção face ao risco de taxa de juro.

Quadro 11.11: Ganhos das Estratégias M-Bullet/M-Barbell face a M(1)

Estratégia / Reajustamento	RFRM		TRR-TRE	
	Anual	Semestral	Anual	Semestral
Maturity-Bullet	-37,7	-22,9	40,5	25,4
Maturity-Barbell	-20,2	-14,7	28,4	24,8

Notas: Os valores exibidos referem-se, para os dois indicadores, à diferença entre cada um dos modelos e a estratégia M(1). Valores negativos na coluna RFRM sugerem que a estratégia M(1) é mais arriscada. Valores positivos na coluna (TRR-TRE) indicam a dimensão da superioridade das estratégias M-Bu/M-Ba em termos de rendibilidade. A unidade de medida é o ponto base.

(385) Este facto deve ser ponderado uma vez que os poucos ganhos de imunização conseguidos com a inclusão do terceiro elemento no vector, especialmente se comparados com o diferencial face ao pior modelo, podem não compensar o previsível aumento nos custos de transacção.

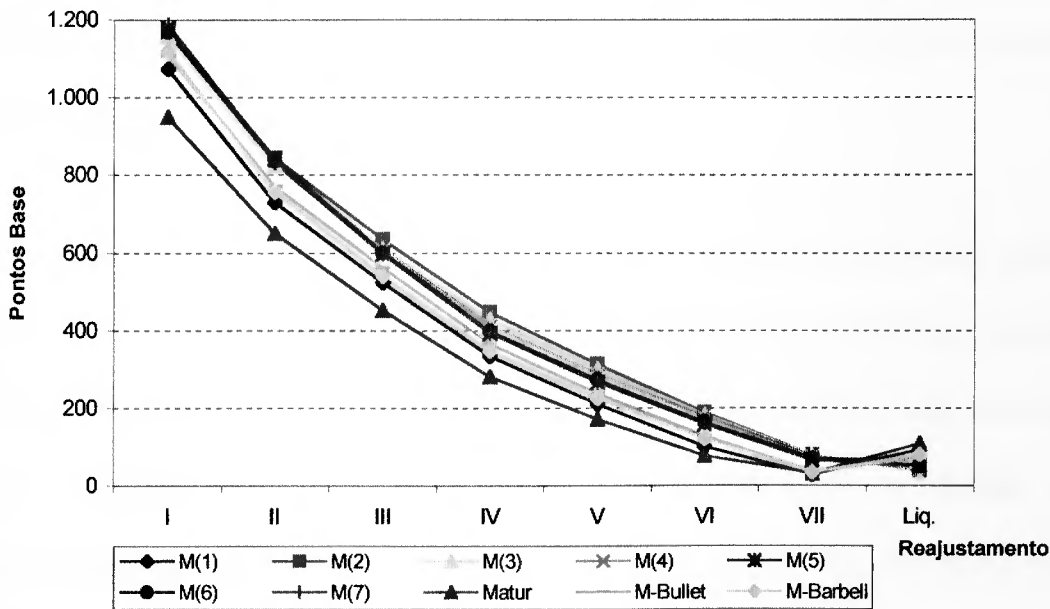
Deve realçar-se ainda que, de entre as duas alternativas que respeitam este critério, a carteira *bullet* apresenta o melhor desempenho. Este resultado não espanta na medida em que a carteira *bullet* é caracterizada por concentrar os seus cash flows em torno do HTI, numa tentativa de minimizar o impacto da segunda principal fonte de risco de taxa de juro encontrada nesta amostra - *choques sobre a inclinação da EPTJ*. Os benefícios da diversificação usufruídos pela estratégia *M(1)* parecem, neste caso, não ser suficientes para compensar a maior exposição a choques não paralelos sobre a EPTJ.

O desempenho da carteira *bullet* aferido nesta amostra não constitui, em nosso entender, condição suficiente para demonstrar a superioridade desta estratégia em todas as situações, e deve ser enquadrado no perfil de choques de taxa de juro registado neste período. Com efeito, o nosso horizonte de análise é caracterizado por uma diminuição acentuada no nível de taxas de juro, acompanhada de um aumento significativo na inclinação. Este padrão de comportamento permitia-nos antecipar, por tudo aquilo que afirmámos nos capítulos 5 e 6, a superioridade da carteira *bullet* face à carteira *barbell*.³⁸⁶

Relativamente ao desempenho das estratégias ao longo do HTI a figura 11.6 ilustra, sem surpresas, uma clara *tendência para a diminuição do risco (medido pelo RMSD) à medida que nos aproximamos do momento de liquidação da carteira*. Se exceptuarmos comportamento da estratégia de maturidade que, por força da sua natureza, exhibe sempre uma duração aditiva inferior ao HTI (e em consequência uma previsível menor volatilidade), todas as demais estratégias apresentam trajetórias de risco semelhantes.

⁽³⁸⁶⁾ Como que comprovando aquilo que acabámos de afirmar, os estudos empíricos de Mann e Ramanlal (1997) e Jones (1991) demonstram que nos casos em que a dinâmica dos choques de taxa de juro é caracterizada por subidas no nível (e pela esperada *horizontalização* da EPTJ), a performance da carteira *barbell* é superior à da carteira *bullet*.

Figura 11.6: Volatilidade das Estratégias de Investimento ao Longo do HTI



Notas: Os valores representados podem ser encontrados no **Anexo 8A** e referem-se ao conjunto das simulações realizadas com reajustamento semestral da carteira. Os resultados respeitantes à medida de risco RFRM e os relativos à rendibilidade das estratégias ao longo do HTI são apresentados no **Anexo 8B** e no **Anexo 9**, respectivamente.

A finalizar, salientamos o facto do aumento da periodicidade de reajustamento da carteira ter produzido efeitos claramente contrários ao previsto pela teoria.

Quadro 11.12: Consequências do Aumento da Periodicidade de Reajustamento

Estratégia / Indicador	RMSD	RFRM	TRR-TRE
Maturidade	-1,8	-2,0	-3,7
Maturity-Bullet	-5,2	-5,2	-5,6
Maturity-Barbell	3,9	4,2	5,9
M(1)	9,6	9,6	9,5
M(2)	-8,0	-7,0	-13,6
M(3)	-9,3	-6,9	-10,3
M(4)	-11,9	-10,1	-10,2
M(5)	-5,4	-4,8	-11,5
M(6)	-20,2	-22,9	-19,7
M(7)	-34,6	-39,2	-26,0

Notas: Os dados apresentados correspondem, para os três indicadores, à diferença entre o valor obtido nas simulações com reajustamento anual e o valor registado nas simulações com reajustamento semestral. Valores negativos indicam a superioridade da estratégia com maior intervalo de tempo entre reajustamentos. A unidade de medida é o ponto base.

Com efeito, e como se observa pelo quadro 11.12, na maioria dos casos *o desempenho das estratégias de investimento piorou com a redução para metade do intervalo de tempo entre momentos de reajustamento*.³⁸⁷

Não temos conhecimento de nenhum estudo onde este problema tenha sido analisado em detalhe, e a única explicação aceitável que encontramos para este comportamento inesperado foi avançada por Ingersoll (1983) e Bierwag *et al.* (1993) e está relacionada com o problema da utilização de preços que contém erros de medida, mais propriamente de cotações que não correspondem a transacções efectivas mas a valores médios das ofertas de compra e de venda.

O uso de dados nestas condições (como é nosso caso) induz diferenças entre o preço teórico (construído com base em estimativas de taxa *spot*) e o preço usado na simulação, e piora (conforme se observa no quadro 11.12) o desempenho de todas as estratégias. Este fenómeno tem ainda um efeito perverso, uma vez prejudica de forma mais acentuada as estratégias onde a composição da carteira é necessariamente mais volátil (estratégias de imunização), e na proporção do número de restrições a satisfazer.³⁸⁸

11.6. Comparação com Estudos Anteriores

A finalizar o nosso estudo, apresentamos no quadro 11.13 um resumo da metodologia adoptada nos principais estudos empíricos efectuados ao desempenho de modelos de imunização de factor único e multifactor.

(³⁸⁷) Conclusões semelhantes são obtidas por Pereira e Cassola (1998).

(³⁸⁸) Como é bem patente no quadro 11.12, a estratégia de maturidade detém uma clara vantagem sobre as estratégias de imunização na medida em preserva, na maioria dos casos, uma das obrigações durante todo o HTI, exigindo naturalmente muito menos transacções.

Quadro 11.13: Resumo da Metodologia Usada nos Principais Estudos Empíricos de Imunização

Autor(es)	Mercado	Período	HTI (anos)	Reajust. (meses)	Modelos Testados	Modelos/Estratégias de Controle	Sup. Modelo Multifactor
Fisher e Weil (1971)	EUA	1925-68	5, 10, 20	12	Fisher-Weil	Long Naïve, Maturidade	N.A.
Bierwag, Kaufman, Toevs e Schweitzer (1981)	EUA	1925-78	10	12	Macaulay, Fisher-Weil, Bierwag e Khang	Maturidade, Short Naïve e Long Naïve	N.A.
Pereira e Cassola (1998)	POR	1993-97	0.5, 3	1, 3, 6	Macaulay, Fisher-Weil, Bierwag e Khang, Vasicek, CIR, Wu	Maturidade, Short Naïve e Long Naïve	N.A.
Brennan e Schwartz (1983)	EUA	1958-79	5, 10	12	Modelo de Equilíbrio com 2 factores	Fisher-Weil	Não
Nelson e Schaefer (1983)	EUA	1930-79	5, 10, 15 ³⁸⁹	1	Modelo de Equilíbrio com 2 factores (Long rate/spread)	Short-rate, Long-rate, Maturidade, Fisher-Weil	Não
Ingersoll (1983)	EUA	1950-79	5	12	Fisher-Weil, Modelo com 2 factores	Maturidade, Short naïve e Long naïve, Macaulay	Sim
Chambers, Carleton e McEnally (1988)	EUA	1976-80	0.25, 4	3	Modelo do Vector de Duração	Naïve, Maturidade	Sim
Nawalkha e Chambers (1997)	EUA	1981-86	4	12	Modelo M-Vector	Fisher-Weil	Sim

Notas: N.A. – Não aplicável

⁽³⁸⁹⁾ Maturidades de referência para a obrigação alvo.

Fisher e Weil (1971) são pioneiros na condução de testes empíricos ao desempenho de estratégias de imunização. Os autores comparam a performance da imunização baseada na sua medida de duração aditiva com a proporcionada por duas estratégias de controlo³⁹⁰, e inclinam-se perante a superioridade da estratégia de imunização.

O primeiro estudo comparativo ao desempenho de modelos (unifactor) de imunização foi realizado por Bierwag *et al.* (1981). Entre as principais conclusões deste estudo salientamos: (i) o facto das estratégias de duração imunizante se superiorizarem à estratégia de maturidade e demais estratégias activas; (ii) o facto do modelo de Macaulay apresentar uma performance comparável à exibida pelos modelos fundados em processos estocásticos mais sofisticados, nada se podendo aquilatar sobre a supremacia de alguma das medidas de duração;³⁹¹ (iii) o facto das estratégias de imunização gerarem um retorno inferior ao esperado e serem sensíveis à composição da carteira.³⁹²

Num estudo recente para o mercado português, Pereira e Cassola (1998) comparam o desempenho dos tradicionais modelos de duração imunizante³⁹³ com a performance dos modelos de duração estocástica de Vasicek (1977), CIR (1985) e Wu (2000). O

(³⁹⁰) As duas estratégias de controlo correspondiam a uma estratégia *long naïve* e a uma estratégia de maturidade. A *estratégia long naïve* compreendia a aquisição, no início de cada ano, de uma obrigação com maturidade de 20 anos. No final desse ano a obrigação seria alienada utilizando-se o produto da venda, juntamente com os cupões entretanto recebidos, na compra de uma nova obrigação com prazo de 20 anos. A *estratégia de maturidade* consistia, simplesmente, na aquisição inicial de uma obrigação com maturidade igual ao HTI.

(³⁹¹) A estratégia baseada no processo log-multiplicativo de Khang foi a única a revelar um desempenho fraco. Os autores sugerem que esta má performance pode estar associada ao uso de dados anuais.

(³⁹²) Estes resultados contrariavam a teoria e indicavam que a tentativa de eliminar o risco de taxa de juro empreendendo estratégias de imunização sujeitava o investidor a um novo tipo de risco: o *risco processo estocástico* (ou *risco de imunização*). Estas conclusões são corroboradas por Ingersoll (1983) que, contudo, não se inclina perante a superioridade das estratégias de duração (imunização) em relação à estratégia de maturidade, o que contraria os resultados de Fisher e Weil (1971). Ingersoll atribui esta diferença à natureza “*alisada*” das séries de Durand. O autor usa uma base de dados distinta (CRSP).

(³⁹³) Mais propriamente dos modelos de Macaulay, Fisher e Weil, Bierwag e Khang.

modelo do M^2 é também analisado. Todos os modelos foram examinados segundo três critérios distintos para a construção da carteira (*bullet*, *barbell* e *ladder*). De entre as principais conclusões do estudo destacamos: (i) o facto da estratégia de maturidade remover a maior parte do risco de taxa de juro; (ii) a evidência de que os modelos de imunização (incluindo os de equilíbrio) não apresentam resultados substancialmente superiores aos da estratégia de maturidade; (iii) a supremacia da carteira *ladder*; (iv) a comprovação de que os modelos M^2 e de Fisher-Weil geram resultados idênticos; (v) a constatação de que a reformulação operada por Wu às medidas de duração de Vasicek e CIR não gera melhores resultados.³⁹⁴

Brennan e Schwartz (1983) formulam estratégias de imunização com base no seu modelo de equilíbrio com duas variáveis de estado. O desempenho alcançado revelou-se comparável ao produzido pelo modelo de Fisher-Weil, pelo que os autores concluem que (*op. cit.*, pp. 28-29): «...in the current state of the art, the duration model is probably the most appropriate one for practical purposes when the analysis is concerned only with default-free straight bonds». Em sentido idêntico se pronunciam Ingersoll (1983) e Nelson e Schaefer (1983).

Chambers *et al.* (1988) efectuaram testes empíricos ao desempenho de estratégias de imunização com base no modelo do vector de duração, considerando vectores de dimensão variada ($m = 1, 2, \dots, 7$). Os autores concluem: (i) que a adição de elementos de ordem superior ao vector de duração melhora substancialmente a performance da estratégia de imunização; (ii) que a estratégia que contempla um vector de duração com os primeiros cinco elementos elimina a quase totalidade do risco de taxa de juro.

⁽³⁹⁴⁾ Wu (2000) não compartilha naturalmente esta opinião e conclui, num estudo realizado para o mercado belga, que as reformulações por si propostas suplantam as formulações originais de Vasicek e CIR, ultrapassando inclusive, nalguns casos, a performance conseguida pelo modelo de Macaulay.

Os testes empíricos realizados por Nawalkha e Chambers (1997) destinaram-se a provar a superioridade dos modelos multifactor (i.e. do modelo *M-Vector*) face ao modelo de factor único de Fisher e Weil. Almejavam ainda determinar a dimensão óptima do vector de medidas de risco de taxa de juro. Os autores inclinam-se perante a supremacia do modelo multifactor e concluem que a estratégia $M(5)$ elimina mais de 95% do risco presente na estratégia de duração aditiva. Salientam ainda o facto dos resultados obtidos serem independentes do período amostral, algo a que não será alheio o facto do modelo *M-Vector* ser independente do processo estocástico que comanda as taxas de juro.

Numa perspectiva diferente, Gultekin e Rogalski (1984) e Elton *et al.* (1990) efectuam testes empíricos ao poder explicativo das medidas de duração imunizante.³⁹⁵ Entre as conclusões dos primeiros salientamos: (i) a evidência de que a duração de Macaulay apenas explica 50% da volatilidade dos retornos das obrigações³⁹⁶; (ii) o facto de todas as medidas de duração imunizante terem produzido resultados semelhantes; (iii) a superioridade dos modelos multifactor e, por fim, (iv) o argumento de que carteiras de obrigações com igual duração inicial não geram, forçosamente, o mesmo retorno.³⁹⁷

(³⁹⁵) No estudo de Gultekin e Rogalski (1984) o desempenho dos modelos de duração imunizante é comparado com o obtido usando medidas de duração extraídas do modelo de Cooper e do modelo de duração estocástica de CIR (1979).

(³⁹⁶) O poder explicativo é medido, no estudo de Gultekin e Rogalski, pelo R^2 de uma regressão entre o retorno da obrigação e a respectiva medida de duração. O valor acima referido respeita ao período completo da amostra: 1947-1976.

(³⁹⁷) O estudo de Gultekin e Rogalski foi fortemente contestado por Bierwag (1987) e por Bierwag *et al.* (1989), essencialmente pelas suas deficiências metodológicas. Num estudo mais recente para o mercado norte-americano, Ilmanen (1992) corrige alguns dos problemas detectados e conclui, de forma surpreendente, que o poder explicativo (medido também pelo R^2) da duração de Macaulay aumentou significativamente durante a década de 80, atingindo o R^2 valores entre os 80 e os 90% da variabilidade dos retornos. As principais causas apontadas pelo autor para justificar esta evolução referem-se, por um lado, ao aumento do nível de volatilidade das taxas de juro, que reforça o papel da componente sistemática no retorno das obrigações e, por outro, ao aumento da importância relativa dos choques paralelos no padrão de comportamento da EPIJ.

12. Conclusão

O *risco de taxa de juro* manifesta-se pela volatilidade dos preços (*risco de preço*) dos activos financeiros em consequência de movimentos adversos, não apenas no nível geral das taxas de juro, mas também na configuração da EPTJ (choques sobre a inclinação, sobre a curvatura, etc.). A variabilidade nas taxas a que poderão ser reinvestidos os cash flows regularmente distribuídos pelos activos traduz uma segunda componente do risco de taxa de juro - o *risco de reinvestimento*.

A estratégia de imunização permite reduzir (e inclusive eliminar), pelo menos teoricamente, o risco provocado pelas modificações nas taxas de juro durante o HTI sobre o valor do investimento. As condições de imunização pressupõem, regra geral, o ajustamento das medidas de risco de taxa de juro da carteira (duração, convexidade, etc.) às respectivas medidas de risco do activo alvo.

As definições das medidas de risco de taxa de juro não são, contudo, universais. Com efeito, elas dependem da forma adoptada pelos factores de risco. A solução clássica nesta matéria é dada, no contexto dos modelos de factor único dependentes do processo estocástico, por Macaulay (1938). O autor usa como único factor a TRA de uma obrigação, ou seja, admite que a EPTJ é horizontal e apenas sofre choques do tipo paralelo. Na mesma linha de investigação, Fisher e Weil (1971), Bierwag (1977) e Khang (1979) consideram que a incerteza nos modelos é fruto de determinados choques não antecipados sobre a EPTJ, choques estes que diferem apenas na direcção preconizada.

Nestes modelos, a incapacidade de identificar correctamente o padrão seguido nas oscilações de taxa de juro sujeita o investidor ao *risco de processo estocástico*. A juntar a este

aspecto, a estrutura de correlação (perfeita) imposta constitui um entrave adicional e restringe a capacidade de imunização. Acresce que os modelos são inconsistentes com as condições de equilíbrio e admitem oportunidades de arbitragem.

Em resposta a estas limitações foram desenvolvidos modelos de equilíbrio (de factor único e multifactor) para a EPTJ. Apesar de mais consistentes do ponto de vista teórico, estes modelos revelaram-se na maioria dos casos incapazes de superar a eficácia em termos de imunização dos modelos mais simples. Em alternativa foram propostos modelos independentes do processo estocástico com um ou mais factores. Estes modelos asseguram a consistência com as condições de equilíbrio ao não imporem quaisquer restrições aos movimentos das taxas de juro.

Dentro desta categoria, os modelos com uma única fonte de incerteza (modelos do M-Quadrado, do M-Absoluto e do \tilde{N}) apostam sobretudo na minimização do risco de processo estocástico. Os modelos multifactor (modelo do vector de duração, modelo M-Vector, etc.) vão mais longe e tentam colmatar as deficiências dos modelos unifactoriais do ponto de vista da protecção do investimento contra choques não paralelos sobre a EPTJ, melhorando o desempenho da estratégia de imunização.

Numa tentativa de demonstrar a superioridade empírica deste tipo de modelos no mercado português é efectuado um teste ao desempenho da estratégia de imunização com base no modelo *M-Vector*. O período analisado está compreendido entre Agosto de 1993 e Setembro de 1999. As conclusões deste estudo indicam:

- i) Que os modelos de imunização analisados reduzem o risco de taxa de juro subjacente a uma convencional estratégia de maturidade;

- ii) Que o modelo multifactor (*M-Vector*) supera claramente o desempenho do modelo de imunização de factor único testado (modelo de duração aditiva de Fisher e Weil);
- iii) Que o modelo que apresenta melhores resultados no binómio risco/retorno compreende os três primeiros elementos do vector de medidas de risco de taxa de juro (estratégia $M(3)$), ou seja, o melhor modelo é aquele imuniza simultaneamente a carteira contra choques sobre o nível, choques sobre a inclinação e choques sobre a curvatura da EPTJ.
- iv) Que a tradicional estratégia de imunização contra choques paralelos não é insensível ao critério de formação da carteira imunizadora;
- v) Que o desempenho das estratégias de imunização não melhora (antes pelo contrário!) com a redução do intervalo de tempo entre momentos de reajustamento da carteira

A curta existência do mercado de obrigações em Portugal ainda condiciona o âmbito dos estudos de imunização que podem ser realizados. A impossibilidade de efectuar simulações sobre períodos amostrais independentes no tempo impediu-nos de testar a consistência do modelo multifactor ao longo do tempo, algo que contamos fazer assim que a dimensão da amostra o permitir. Por fazer fica ainda, por manifesta falta de tempo, um teste comparativo à performance dos vários modelos multifactor apresentados.

BIBLIOGRAFIA

- Babbel, D. (1983), Duration and the Term Structure of Volatility, in: Kaufman, G. G., Bierwag, G. O. e Toevs, A., editors, *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, London, JAI Press Inc.
- Babcock, G. C. (1984), Duration as a Link Between Yield and Value, *The Journal of Portfolio Management*, Summer, pp. 58-65.
- Babcock, G. C. (1985), Duration as a Weighted Average of Two Factors, *Financial Analyst Journal*, March/April, pp. 75.
- Balbás, A. e Ibáñez, A. (1998), When can you Immunize a Bond Portfolio?, *Journal of Banking and Finance*, 22, pp. 1571-1595.
- Balduzzi, P., Das, S., Foresi, S. e Sundaram, R. (1996), A Simple Approach to Three-Factor Affine Term Structure Models, *The Journal of Fixed Income*, 6, N° 3, December, pp. 43-53.
- Ball, C. e Torous, W. (1983), Bond Price Dynamics and Options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, N° 4, December, pp. 517-532.
- Barber, J. R. (1995), A Note on Approximating Bond Price Sensitivity using Duration and Convexity, *The Journal of Fixed Income*, March, pp. 95-98.
- Barber, J. R. (1999), Bond Immunization for Affine Term Structures, *The Financial Review*, 34, pp. 127-140.
- Barber, J. R. e Copper, M. L. (1996), Immunizing Using Principal Component Analysis, *The Journal of Portfolio Management*, Fall, pp. 99-105.
- Barber, J. R. e Copper, M. L. (1997), Is Bond Convexity a Free Lunch?, *The Journal of Portfolio Management*, Fall, pp. 113-119.

- Barone-Adesi, G., Bourgoin, P. e Giannopoulos, K. (1998), Don't Look Back, *Risk*, August, pp. 100-103.
- Barreto, I. (1991), *Obrigações: Análise e Gestão*, Texto Editora, 2ª Edição.
- Barrett, W. B., Gosnell, T. F. e Heuson, A. J. (1995), Yield Curve Shifts and the Selection of Immunizations Strategies, *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 53-64.
- Basle Committee on Banking Supervision (1995), *An Internal Model-Based Approach to Market Risk Capital Requirements*, Basle, Switzerland: Basle Committee on Banking Supervision.
- Basle Committee on Banking Supervision (1996), *Amendment to the Capital Accord to Incorporate Market Risks*, Basle, Switzerland: Basle Committee on Banking Supervision.
- Basle Committee on Banking Supervision (2001), *Principles for the Management and supervision of Interest Rate Risk*, Basle, Switzerland: Basle Committee on Banking Supervision, Supporting Document to the New Basle Accord.
- Beder, T. S. (1995), VAR: Seductive But Dangerous, *Financial Analyst Journal*, September/October, pp. 12-24.
- Bierwag, G. O. (1977), Immunization, Duration and the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, December, pp. 725-742.
- Bierwag, G. O. (1979), Dynamic Portfolio Immunization Policies, *Journal of Banking and Finance*, April.
- Bierwag, G. O. (1987), *Duration Analysis: Management of Interest Rate Risk*, Cambridge Massachusetts, Ballinger Publishing Company.
- Bierwag, G. O. (1996), The Ho-Lee Binomial Stochastic Process and Duration, *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 76-87.

Bierwag, G. O. e Kaufman, G. G. (1985), Duration Gap for Financial Institutions, *Financial Analyst Journal*, March-April, pp. 69-71.

Bierwag, G. O. e Khang, C. (1979), An Immunization Strategy is a Minimax Strategy, *The Journal of Finance*, 34, N° 2, May, pp. 389-399.

Bierwag, G. O., Corrado, C. J. e Kaufman, G. G. (1990), Computing Durations for Bond Portfolios, *The Journal of Portfolio Management*, Fall, pp. 51-55.

Bierwag, G. O., Corrado, C. J. e Kaufman, G. G. (1992), Duration for Portfolios of Bonds Priced on Different Term Structures, *Journal of Banking and Finance*, 16, pp. 715-714.

Bierwag, G. O., Fooladi, I. e Roberts, G. S. (1993), Designing an Immunized Portfolio: Is M-Square the Key?, *Journal of Banking and Finance*, 17, pp. 1147-1170.

Bierwag, G.O., Kaufman, G. G. e Khang, C. (1978), Duration and Portfolio Analysis: An Overview, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 13, November, pp. 671-685.

Bierwag, G.O., Kaufman, G. G. e Latta, C. M. (1988), Duration Models: A Taxonomy, *The Journal of Portfolio Management*, Fall, pp. 50-54.

Bierwag, G.O., Kaufman, G. G. e Latta, C.M. (1987), Bond Portfolio Immunization: Tests of Maturity, One Factor and Two-Factor Duration Matching Strategies, *Financial Review*, pp. 203-209.

Bierwag, G.O., Kaufman, G. G. e Toevs, A. L. (1982), Single Factor Duration Models in a discrete General Equilibrium Framework, *The Journal of Finance*, Vol. 37, N. ° 2, May, pp. 325-338.

Bierwag, G.O., Kaufman, G. G. e Toevs, A. L. (1983a), Recent Developments in Bond Portfolio Immunization, in: Kaufman, G. G., Bierwag, G. O. e Toevs, A., editors, *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, London, JAI Press Inc.

- Bierwag, G.O., Kaufman, G. G. e Toevs, A. L. (1983b), Immunization Strategies for Funding Multiple Liabilities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, N° 1, pp. 113-123.
- Bierwag, G.O., Kaufman, G. G., Latta, C.M. e Roberts, G. S. (1989), Duration as a Measure of Basis Risk: The Wrong Answer at Low Cost – Rejoinder, *The Journal of Portfolio Management*, Summer, pp. 82-85.
- Bierwag, G.O., Kaufman, G. G., Schweitzer, R. e Toevs, A. L. (1981), The Art of Risk Management in Bond Portfolios, *The Journal of Portfolio Management*, Spring, pp. 27-36.
- Black, F. (1976), The Pricing of Commodity Contracts, *Journal of Financial Economics*, 3, N° 1, January-March, pp. 167-179.
- Black, F. e Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.
- Black, F., Derman, E. e Toy, W. (1990), A One-Factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options, *Financial Analyst Journal*, January-February, pp. 33-39.
- Black, F., e Karasinski, P. (1991), Bond and Option Pricing When Short Rates are Lognormal, *Financial Analyst Journal*, July-August, pp. 52-59.
- Blake, D. e Orszag, J. M. (1996), A Closed-Formula for Calculating Bond Convexity, *The Journal of Fixed Income*, June, pp. 88-91.
- Bliss, R. R. (1989), Fitting Term Structure to Bond Prices, *Working Paper*, University of Chicago.
- Bliss, R. R. (1997), Movements in the Term Structure of Interest Rates, *Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Review*, Fourth Quarter, pp. 16-33.

- Bliss, R. R. e Ronn, E. I. (1989), Arbitrage-Based Estimation of Nonstationary Shifts in the Term Structure of Interest Rates, *The Journal of Finance*, 44, July, N° 3, pp.591-611.
- Bolder, D. e Strélski, D. (1999), Yield Curve Modelling at the Bank of Canada, *Bank of Canada, Technical Report* N° 84, February.
- Bowden, R. J. (1997), Generalizing Interest Rate Duration with Directional Derivatives: Direction X and Applications, *Management Science*, 43 (5), pp. 198-205.
- Boyle, P. (1978), Immunization Under Stochastic Models of the Term Structure, *Journal of The Institute of Actuaries*, 105, pp. 177-187.
- Brace, A., Gatarek, D. e Musiela, M. (1997), The Market Model of Interest Rate Dynamics, *Mathematical Finance*, 7, N° 2, pp. 127-55.
- Brennan, M. J. e Schwartz, E. S. (1979), A Continuous Time Approach to the Pricing of Bonds, *Journal of Banking and Finance*, 3, pp. 133-155.
- Brennan, M. J. e Schwartz, E. S. (1980), Analysing Convertible Bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, pp. 907-929.
- Brennan, M. J. e Schwartz, E. S. (1982), An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, September, pp. 301-330.
- Brennan, M. J. e Schwartz, E. S. (1983), Duration, Bond Pricing and Portfolio Management, in: Kaufman, G. G., Bierwag, G. O. e Toevs, A., editors, *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, London, JAI Press Inc.
- Britten-Jones, M. e Schaefer, S. M. (1999), Non-Linear Value at Risk, *European Finance Review*, Vol. 2, N° 2, pp. 1-27.
- Brooks, R. e Attinger, B. (1992), Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Convertible Bonds, *Financial Analyst Journal*, July-August, pp. 74-77.

- Bülher, A. e Zimmermann, H. (1996), A Statistical Analysis of the Term Structure of Interest Rates in Switzerland and Germany, *The Journal of Fixed Income*, December, pp. 55-67.
- Burger, H. (1987), Duration, durée de vie et sensibilité d'un emprunt obligataire, *Analyse Financière*, 3^o trimestre.
- Caks, J., Lane, W. R., Greenleaf, R. W. e Joules, R. G. (1985), A Simple Formula for Duration, *Journal of Financial Research*, Fall, pp. 245-249.
- Canabarro, E. (1995), Where do One-Factor Interest Rate Models Fail?, *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 31-52.
- Carcano, N. e Foresi, S. (1997), Hedging against Interest Rate Risk: Reconsidering Volatility-Adjusted Immunization, *Journal of Banking and Finance*, 21, pp. 127-141.
- Cárdenas, J., Fruchard, E., Picron, J. Reyes, C., Walters, K. e Yang, W. (1999), Monte Carlo Within a Day, *Risk*, February, pp. 55-59.
- Carleton, W. e Cooper, I. (1976), Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates, *The Journal of Finance*, 31, N^o. 4, September, pp. 1067-1083.
- Carverhill (1994), When is The Short Rate Markovian?, *Mathematical Finance*, 4, N^o. 4, October, pp. 305-312.
- Carverhill (1995), A Note on the Models of Hull and White for Pricing Options on The Term Structure, *The Journal of Fixed Income*, 5, N^o. 2, September, pp. 89-96.
- Cassola, N. e Luís, J. (1996), The Term Structure of Interest Rates: A Comparison of Alternative Estimation Methods with an Application to Portugal, *Working Paper* N^o. 17-96, Banco de Portugal.

- Chambers, D. R. (1984), An Immunization Strategy For Futures Contracts on Government Securities, *The Journal of Futures Markets*, Vol. 4, N° 2, , pp. 173-188.
- Chambers, D. R. (1988), Duration Vector Drops Risk, *Pensions & Investment Age*, March, 21, pp. 38-39.
- Chambers, D. R. e Carleton, W. T. (1988), A Generalized Approach to Duration, *Research in Finance*, Vol. 7, pp. 163-181.
- Chambers, D. R., Carleton, W. T. e McEnally, R. M. (1988), Immunizing Default-Free Bond Portfolios with a Duration Vector, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23, N° 1, March, pp. 89-104.
- Chambers, D. R., Carleton, W. T. e Waldman, D. W. (1984), A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, March, pp. 233-252.
- Chan, K., Karolyi, G., Longstaff, F. e Sanders, A. (1992), An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate, *The Journal of Finance*, 47 (3), July, pp. 1209-1227.
- Chance, D. M. e Jordan, J. V. (1996), Duration, Convexity and Time as Components of Bond Returns, *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 88-96.
- Chen, L. (1996), Stochastic Mean and Stochastic Volatility – a Three Factor Model of the Term Structure of Interest Rates and Its Application in Derivatives Pricing and Risk Management, *Financial Markets, Institutions and Instruments*, 5, N° 1, March, pp. 1-87.
- Chen, R. (1992), Exact Solution for Futures and European Futures Options on Pure Discount Bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27, March, pp. 97-107.
- Choie, K. S. (1990), A Simplified Approach to Bond Portfolio Management: DDS, *The Journal of Portfolio Management*, Spring, pp. 40-45.

- Christensen, P. O. e Sørensen, B. G. (1994), Duration, Convexity, and Time Value, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, pp. 51-60.
- Chua, J. (1984), A Closed-Form Formula for Calculating Bond Duration, *Financial Analyst Journal*, 40, May/June, pp. 76-78.
- Chua, J. (1985), Calculating Bond Duration: Further Simplification, *Financial Analyst Journal*, 41, N° 5, pp. 80-81.
- Chua, J. (1988), A Generalized Formula for Calculating Bond Duration, *Financial Analyst Journal*, September/October, pp. 65-67.
- Clelow, L. e Strickland, C. (1998), *Implementing Derivative Models*, Chichester, John Wiley & Sons.
- Cooper, I. A. (1977), Asset Values, Interest Rate Changes, and Duration, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12, December, pp. 701-723.
- Coronado, M. (2000), Comparing Different Methods for Estimating Value-at-Risk (VAR) for Actual Non-Linear Portfolios: Empirical Evidence, *European Journal of Finance*, forthcoming, August.
- Courtadon, G. (1982), The Pricing of Options on Default-Free Bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, pp. 75-100.
- Courtadon, G. (1993), A Survey of Bond Option Pricing Models, in Schwartz, R. e Smith, C., editors, *Advanced Strategies in Financial Risk Management*, New York: New York Institute of Finance.
- Cox, J., Ingersoll, J. e Ross, S. (1979), Duration and the Measurement of Basis Risk, *Journal of Business*, 52, pp. 51-61.

- Cox, J., Ingersoll, J. e Ross, S. (1981), A Re-Examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates, *The Journal of Finance*, 36, N° 4, pp. 769-799.
- Cox, J., Ingersoll, J. e Ross, S. (1985), A Theory of The Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, 53, pp. 385-407.
- Cox, J., Ingersoll, J. e Ross, S. (1985a), An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices, *Econometrica*, 53, pp. 363-384.
- Cox, J., Ross, S. e Rubinstein, M. (1979), Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 229-263.
- Crack, T. e Nawalkha, S. K. (1999), Common Misunderstandings Concerning Duration and Convexity, *Financial Practise and Education*, forthcoming.
- Crack, T. e Nawalkha, S. K. (2000), Interest Rate Sensitivities of Bond Risk Measures, *Financial Analyst Journal*, January/February, pp. 34-41.
- Cruz, C. (1995), *Obrigações: Mercado, Avaliação, e Risco de Taxa de Juro*, BVP – IMC.
- Cumby, R., Figlewski, S. e Hasbrook, J. (1993), Forecasting Volatilities and Correlations with EGARCH Models, *The Journal of Derivatives*, Winter, pp. 51-63.
- D'Ecclesia, R. L. e Zenios, S. A. (1994), Risk Factor Immunization in the Italian Bond Market, *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 51-58.
- Dahl, H. (1993), A Flexible Approach to Interest-Rate Risk Management, in: Zenios, S.A., *Financial Optimization*, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.
- Dahl, H., Meeraus, A., e Zenios, S. (1993), Some Financial Optimization Models: I Risk Management, in: Zenios, S.A., *Financial Optimization*, Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

- Daigler, R. e Cooper, M. (1998a), A Futures Duration-Convexity Hedging Method, *The Financial Review*, 33, pp. 61-80.
- Daigler, R. e Cooper, M. (1998b), Simultaneously Hedging Bond Duration and Convexity, *Derivatives Quarterly*, Fall, pp. 50-59.
- Deacon, M. e Derry, A. (1994), Estimating the Term Structure of Interest Rates, *Bank of England, Working Paper Series* N°. 24, July.
- Dothan, U. (1978), On the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Financial Economics*, 6, N°. 1, March, pp. 59-69.
- Douglas, L. G. (1990), *Bond Risk Analysis: A Guide to Duration and Convexity*, New York: New York Institute of Finance.
- Dowd, K. (1998), *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*, Chichester, England, John Wiley & Sons.
- Duffie, D. (1996), *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, 2nd Edition.
- Duffie, D. e Pan, J. (1997), An Overview of Value at Risk, *The Journal of Derivatives*, Spring, pp. 7-49.
- Dunez, M. L. e Mahoney, J. M. (1988), Using Duration and Convexity in the Analysis of Callable Bonds, *Financial Analyst Journal*, May/June, pp. 53-72.
- Dybvig, P. (1989), Bond and Bond Option Pricing Based on the Current Term Structure, *Working Paper*, Washington University.
- Dybvig, P., Ingersoll, J. e Ross, S. (1996), Long Forward and Zero-Coupon Rates Can Never Fall, *Journal of Business*, vol. 69, N°. 1, pp. 1-25.

- Dym, S. I. (1991), Measuring the Risk of Foreign Bonds, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, pp. 56-61.
- El-Jahel, L., Perraudin, W. e Selin, P. (1999), Value-at-Risk for Derivatives, *The Journal of Derivatives*, Spring, pp. 7-26.
- Elton, J. E., Gruber, M. J. e Michaely, R. (1990), The Structure of Spot Rates and Immunization, *The Journal of Finance*, Vol. 45, N° 2, pp. 629-642.
- Estrella, A. (1996), Taylor, Black and Scholes: Series Approximations and Risk Management Pitfalls, in *Risk Measurement and Systemic Risk, Proceedings of a Joint Central Bank Research Conference*, Board of Governors of the Federal Reserve System (Ed.), Washington, D.C., pp. 359-379.
- Fabozzi, F. (1988), *Fixed Income Mathematics*, Chicago: Illinois, Probus Publishing Company.
- Fabozzi, F. (2000), *Bond Markets, Analysis and Strategies*, New Jersey, Prentice-Hall, 4ª Edição.
- Falkenstein, E. e Hanweck, J. (1996), Minimizing Basis Risk From Non-Parallel Shifts in the Yield Curve, *The Journal of Fixed Income*, June, pp. 60-68.
- Falkenstein, E. e Hanweck, J. (1997), Minimizing Basis Risk From Non-Parallel Shifts in the Yield Curve – Part II: Principal Components, *The Journal of Fixed Income*, June, pp. 85-90.
- Fallon, W. (1996), Calculating Value at Risk, Wharton Financial Institutions Center Working Paper Series, *Working Paper* 96-49.
- Ferreira, M. (1998), An Empirical Test of Short-Term Interest Rate Models, *Revista de Mercados e Ativos Financeiros*, N° 1, pp. 29-48.

- Finger, C. C. (1997), When is a Portfolio of Options Normally Distributed?, *RiskMetrics Monitor*, Third Quarter, pp. 33-41.
- Fishburn, P. (1977), Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns, *American Economic Review*, 67, N° 2, March, pp. 116-26.
- Fisher, L. (1966), An Algorithm for Finding Exact Rates of Return, *Journal of Business*, January, pp. 111-118.
- Fisher, L. e Weil, R. (1971), Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies, *Journal of Business*, October, pp. 408-431.
- Fong, H. e Fabozzi, F. (1985), *Fixed Income Portfolio Management*, Homewood IL: Dow-Jones-Irwin.
- Fong, H. e Tang, E. (1988), Immunized Bond Portfolios in Portfolio Protection, *Journal of Portfolio Management*, Winter, pp. 63-68.
- Fong, H. e Vasicek, O. (1983), Return Maximization for Immunized Portfolios, in: Kaufman, G. G., Bierwag, G. O. e Toevs, A., editors, *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, London, JAI Press Inc.
- Fong, H. e Vasicek, O. (1984), A Risk Minimizing Strategy for Portfolio Immunization, *The Journal of Finance*, December, pp. 1541-1546.
- Fong, H. e Vasicek, O. (1991), Fixed-Income Volatility Management, *Journal of Portfolio Management*, 17, N° 4, Summer, pp. 41-46.
- Fong, H. e Vasicek, O. (1997), A Multidimensional Framework for Risk Analysis, *Financial Analyst Journal*, July/August, pp. 51-57.
- Fonseca, J. A. (1998), Portfolio Insurance and Bond Management in a Vasicek's Term Structure of Interest Rates, FEUC, *GEMF*, N° 8.

- Fonseca, J. A. (1999), *Obrigações: Métodos de Avaliação e de Gestão do Risco de Taxa de Juro*, Porto, Associação da Bolsa de Derivados do Porto.
- Fooladi, I. e Roberts, G. S. (1992), Bond Portfolio Immunization: Canadian Tests, *Journal of Economics and Business*, 44, pp. 3-17.
- Francis, J. C. (1986), *Investments: Analysis and Management*, McGraw-Hill International Editions, 4ª Edição.
- Gagnon, L. e Johnson, L.D. (1994), Dynamic Immunization Under Stochastic Interest Rates, *The Journal of Portfolio Management*, Spring, pp. 48-54.
- Galdi, P. H. (1987), Indexed Fixed Income Portfolios, in: Fabozzi, F. e Garlicki, T., *Advances in Bond Analysis and Portfolio Strategies*, Chicago, Illinois, Probus Publishing Company.
- Garbade, K. D. (1984), The Effect of Interest Payments on the Duration of a Bond: Implications for Portfolio Management and Yield Curve Analysis, reproduzido de Topics in Money and Securities Markets, Bankers Trust Company, New York, July, em Garbade, K. D. (1996), *Fixed Income Analytics*, Cambridge Massachusetts, MIT Press.
- Garbade, K.D. (1985a), Bond Convexity and Its Implications for Immunization, reproduzido de Topics in Money and Securities Markets, Bankers Trust Company, New York, March, em Garbade, K. D. (1996), *Fixed Income Analytics*, Cambridge Massachusetts, MIT Press.
- Garbade, K.D. (1985b), Managing Yield Curve Risk: A Generalized Approach to Immunization, reproduzido de Topics in Money and Securities Markets, Bankers Trust Company, New York, August, em Garbade, K. D. (1996), *Fixed Income Analytics*, Cambridge Massachusetts, MIT Press.
- Garbade, K. D. (1986a), Hedging in the Treasury Market: Implications of Imperfect Correlation and Nonuniform Volatility of Yield Changes for the Sign of an Optimal

Hedge, reproduzido de Topics in Money and Securities Markets, Bankers Trust Company, New York, April, em Garbade, K. D. (1996), *Fixed Income Analytics*, Cambridge Massachusetts, MIT Press.

Garbade, K. D. (1986b), Modes of Fluctuation in Bond Yields: An Analysis of Principal Components, reproduzido de Topics in Money and Securities Markets, Bankers Trust Company, New York, June, em Garbade, K. D. (1996), *Fixed Income Analytics*, Cambridge Massachusetts, MIT Press.

Garbade, K. D. (1986c), Assessing Risk and Capital Adequacy for Treasury Securities, *Topics in Money And Securities Markets*, Bankers Trust.

Garbade, K. D. (1989), Polynomial Representations of Yield Curve and Modes of Fluctuation, reproduzido de Topics in Money and Securities Markets, Bankers Trust Company, New York, N°. 53, July, em Garbade, K. D. (1996), *Fixed Income Analytics*, Cambridge Massachusetts, MIT Press.

Garbade, K. D. e Dym, S. (1984), Duration: An Introduction to the Concept and Its Uses, reproduzido de Topics in Money and Securities Markets, Bankers Trust Company, New York, July, em Garbade, K. D. (1996), *Fixed Income Analytics*, Cambridge Massachusetts, MIT Press.

Garman, M. (1985), The Duration of Option Portfolios, *Journal of Financial Economics*, 14, pp. 309-315.

Garman, M. (1996), Improving on VAR, *Risk*, Vol.9 (5), pp.61-63.

Garman, M. (1997), Taking VAR to Pieces, *Risk*, Vol.10 (10).

Ghezzi, L. L. (1999), A Maxmin Policy for Bond Management, *European Journal of Operational Research*, 114, pp. 389-394.

- Golub, B. W. e Tilman, L. M. (1997), Measuring Yield Curve Risk Using Principal Components Analysis, Value at Risk, and Key Rate Durations, *The Journal of Portfolio Management*, Summer, pp. 72-84.
- Grandville, O. (2001), *Bond Pricing and Portfolio Analysis: Protecting Investors in the Long Run*, Cambridge Massachusetts, MIT Press.
- Grantier, B. J. (1988), Convexity and Bond Performance: The Benter is Better, *Financial Analyst Journal*, November/December, pp. 79-81.
- Greene, W. H. (2000), *Econometric Analysis*, 4ª Edição, New Jersey, Prentice-Hall.
- Group of Thirty (1993), *Derivatives: Practises and Principles*, New York, Group of Thirty.
- Gultekin, N. B. e Rogalski, R. J. (1984), Alternative Duration Specifications and the Measurement of Basis Risk: Empirical Tests, *Journal of Business*, Vol. 57, N. °2, pp. 241-264.
- Hauser, S., Rozenkranz, M., Ben-Zion, U. e Yaari, U. (2001), International Hedge of Fixed-Income Contracts, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, pp. 91-100.
- Hawawini, G. A. (1982), editor, *Bond Duration and Immunization: Early Developments and Recent Contributions*, New York, Garland Publishing.
- Heath, D., Jarrow, R. e Morton, A. (1990), Bond Pricing and Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, pp. 419-440.
- Heath, D., Jarrow, R. e Morton, A. (1992), Bond Pricing and Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*, Vol. 60, pp. 77-105.
- Hedge, S. P. e Nunn, K. P. (1988), Non-Infinitesimal Rate Changes and Macaulay Duration, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, pp. 69-73.

Hendricks, D. (1996), Evaluation of Value at Risk Models Using Historical Data, Federal Reserve Bank of New York *Economic Policy Review*, N°. 2, April, pp. 39-70.

Hicks, J. R. (1939), *Value and Capital*, Oxford: Claredon Press.

Hill, C. F. e Vaysman, S. (1998), An Approach to Scenario Hedging Using Principal Components Analysis, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, pp. 83-92.

Hiller, R. e Schaack (1990), A Classification of Structured Bond Portfolio Modeling Techniques, *The Journal of Portfolio Management*, Fall, pp. 37-48.

Ho, T. S. Y. (1990), *Strategic Fixed Income Investment*, Homewood, Ill: Dow-Jones-Irwin.

Ho, T. S. Y. (1992), Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risks, *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 29-44.

Ho, T. S. Y. (1995), Evolution of Interest Rate models, *The Journal of Derivatives*, Summer, pp. 9-20.

Ho, T. S. Y. e Lee, S. (1986), Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *The Journal of Finance*, 41, N°. 5, December, pp. 1011-1030.

Ho, T. S. Y., Chen, M. Z. H. e Eng, F. H. T. (1996), VAR Analytics: Portfolio Structure, Key Rate Convexities, and VAR Betas, *The Journal of Portfolio Management*, Fall, pp. 89-97.

Hodges, S. D. e Neuberger, A. (1989), Optimal Replication of Contingent Claims Under Transaction Costs, *Review of Futures Markets*, 8, pp. 222-239.

Hoggard, T. Whalley, A. e Wilmott, P. (1992), Hedging Option Portfolios in the Presence of Transaction Costs, *Advances in Futures and Options Research*, 7, pp. 21-35.

Holton, G. A. (1996), *Closed Form Value at Risk*, Boston: Contingency Analysis.

- Holton, G. A. (1998), Simulating Value at Risk, *Risk*, Vol. 11 (5), pp. 60-63.
- Hopewell, M. H. e Kaufman, G. G. (1973), Bond Price Volatility and Term to Maturity: A Generalized Respecification, *American Economic Review*, September, pp. 749-753.
- Hopper, G. P. (1996), Value at Risk: A New Methodology for Measuring Portfolio Risk, Federal Reserve Bank of Philadelphia *Business Review*, July/August, pp. 19-30.
- Hull, J. (2000), *Options, Futures & Other Derivatives*, London, Prentice-Hall, 4th Edition.
- Hull, J. e White, A. (1990a), Pricing Interest Rate Derivative Securities, *Review of Financial Studies*, 3, N° 4, pp. 573-592.
- Hull, J. e White, A. (1990b), Valuing Derivative Securities Using a Explicit Difference Method, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, pp. 87-100.
- Hull, J. e White, A. (1993a), One Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest-Rate Derivative Securities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, N° 2, pp. 235-254.
- Hull, J. e White, A. (1993b), Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices, *Advances in Futures and Options Research*, 6, pp. 1-13.
- Hull, J. e White, A. (1994a), Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models, *Journal of Derivatives*, 2, N° 1, Fall, pp. 7-16.
- Hull, J. e White, A. (1994b), Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models, *Journal of Derivatives*, 2, N° 2, Winter, pp. 37-48.
- Hull, J. e White, A. (1995), A Note on Models of Hull and White for Pricing Options on the Term Structure: Response, *The Journal of Fixed Income*, 5, N° 2, September, pp. 97-102.

- Hull, J. e White, A. (1996), Using Hull-White Interest Rate Tree, *Journal of Derivatives*, 3, N° 3, Spring, pp. 26-36.
- Hull, J. e White, A. (1998), Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed, *The Journal of Derivatives*, Spring, pp. 9-19.
- Iacono, F. e Skeie, D. (1996), Translating VaR Using \sqrt{T} , *Derivatives Week*, October 14, pp. 8.
- Ilmanen, A. (1992), How Well Does Duration Measure Interest Rate Risk, *The Journal of Fixed Income*, March, pp. 43-51.
- Ilmanen, A. e Iwanowski, R. (1997), Dynamics of The Shape of the Yield Curve, *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 47-60.
- Ingersoll, J. E. (1983), Is Immunization Feasible? Evidence form the CRSP Data, in: Kaufman, G. G., Bierwag, G. O. e Toevs, A., editors, *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, London, JAI Press Inc.
- Ingersoll, J. E., Skelton, J. e Weil, R. (1978), Duration Forty Years Later, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, November, pp. 627-650.
- Inui, K. e Kijima, M. (1998), A Markovian Framework in Multi-Factor Heath-Jarrow-Morton Models, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33 (3), September, pp. 423-440.
- Jackson, P., Maude, D. J. e Perraudin, W. (1997), Bank Capital and Value at Risk, *The Journal of Derivatives*, Spring, pp. 73-89.
- Jamshidian, F. (1989), An Exact Bond Option Pricing Formula, *The Journal of Finance*, 44, pp. 205-209.

- Jamshidian, F. (1997), LIBOR and Swap Market Models and Measures, *Finance and Stochastics*, 1, pp. 293-330.
- Jamshidian, F. e Zhu, Y. (1988), Analysis of Bonds with Embedded Options, *Advances in Futures and Options Research*, 3, pp. 63-95.
- Jamshidian, F. e Zhu, Y. (1996), Scenario Simulation Model for Risk Management, *Capital Market Strategies*, 12, December, pp. 26-30.
- Jamshidian, F. e Zhu, Y. (1997), Scenario Simulation: Theory and Methodology, *Finance and Stochastics*, 1, pp. 43-67.
- Jarrow, R. (1996), *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, McGraw-Hill.
- Jarrow, R. e Turnbull, S. (1994), Delta, Gamma and Bucket Hedging of Interest Rate Derivatives, *Applied Mathematical Finance*, Vol.1, N° 1, September, pp. 1-24.
- Jarrow, R. e Turnbull, S. (1996), *Derivative Securities*, Cincinnati, Ohio: South-Western.
- Jones, F. (1991), Yield Curve Strategies, *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 43-48.
- Jorion, P. (1997), *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, Chicago, Irwin Professional Publishing.
- JP Morgan (1996), *RiskMetrics – Technical Document*, 4ª Edição, New York: JP Morgan
- Kahn, R. N. e Lochoff, R. (1990), Convexity and Exceptional Return, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, pp. 43-47.
- Kaufman, G. G. (1978), Measuring Risk and Return for Bonds: A New Approach, *Journal of Bank Research*, Summer, pp. 82-90.

Kelly, T. A. e Thurston, D. C. (1995), A New Class of Duration Measures, *Economic Letters*, 47, pp. 371-375.

Khang, C. (1979), Bond Immunization when Short-Term Rates Fluctuate more than Long-Term Rates, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14, December, pp. 1085-1090.

Kishimoto, N. (1998), Duration and Convexity Coupon Bond Futures, *The Journal of Fixed Income*, June, pp. 79-83.

Klaffky, T. E., Ma, Y. Y. e Nozari, A. (1992), Managing Yield Curve Exposure: Introducing Reshaping Durations, *The Journal of Fixed Income*, December, pp. 39-45.

Knez, P., Litterman, R. e Scheinkmann, J. (1994), Explorations into Factors Explaining Money Market Returns, *The Journal of Finance*, December, pp. 1861-82.

Kocherlakota, R., Rosenbloom, E. e Shiu, E. (1988), Algorithms for Cash-Flow Matching, *Transactions of the Society of Actuaries*, 40, pp. 477-484.

Kocherlakota, R., Rosenbloom, E. e Shiu, E. (1990), Cash-Flow Matching and Linear Programming Duality, *Transactions of the Society of Actuaries*, 42, pp. 281-293.

Kolb, R. W. (2000), *Futures, Options, and Swaps*, Oxford, Blacwell Publishers, 3ª Edição.

Kornbluth, J. S. H. e Salkin, G. R. (1994), Duration Moments and Yield Curve Moments, *Journal of Business Finance and Accounting*, 21(2), March, pp. 175-193.

Kraus, A. e Smith, M. (1993), A Simple Multifactor Term Structure Model, *The Journal of Fixed Income*, June, pp. 19-23.

Kritzman, M. (1992), What Practitioners Need to Know About Duration and Convexity, *Financial Analyst Journal*, 48, Nº. 6, November/December, pp. 17-21.

Kupiec, P. (1995), Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, *The Journal of Derivatives*, Winter, pp. 73-84.

Kupiec, P. (1998), Stress Testing in a Value at Risk Framework, *The Journal of Derivatives*, Fall, pp. 7-24.

La Bruslerie, H. e Gellusseau, L. (1987), La Mise en Evidéce Empirique de la Structure à Terme des Taux d'Intérêt, *Finance*, Janeiro.

Lacey, N. J. e Nawalkha, S. K. (1993), Convexity, Risk, and Returns, *The Journal of Fixed Income*, December, pp. 72-79.

Langtieg, T., Leibowitz, M. e Kogelman, S. (1990), Duration Targeting and the Management of Multiperiod Returns, *Financial Analyst Journal*, September-October, pp. 35-45.

Lee, S. B. e Cho, H. Y. (1992), A Rebalancing Discipline for an Immunization Strategy, *The Journal of Portfolio Management*, Summer, pp. 56-62.

Leibowitz, M. (1986), Total Portfolio Duration: A New Perspective on Asset Allocation, *Financial Analyst Journal*, September-October, pp. 18-29.

Leibowitz, M. (1987), Pension Asset Allocation Through Surplus Management, *Financial Analyst Journal*, March-April, pp. 29-40.

Leibowitz, M., Sorensen, E., Arnott, R. e Hanson, H. (1989), A Total Differential Approach to Equity Duration, *Financial Analyst Journal*, September-October, pp. 30-37.

Leibowitz, M. e Weinberger, A. (1982), Contingent Immunization, Part I: Risk Control Procedures, *Financial Analyst Journal*, November-December, pp. 17-32.

Leibowitz, M. e Weinberger, A. (1983), Contingent Immunization, Part II: Problem Areas, *Financial Analyst Journal*, January-February, pp. 35-50.

Leland, H. E. (1985), Option Pricing and Replication With Transaction Costs, *The Journal of Finance*, 40, pp. 1283-1301.

Leland, H. E. e Rubinstein, M. (1981), Replicating Options with Positions in Stock and Cash, *Financial Analyst Journal*, July-August.

Levin, R. (1985), Discussion of Milgrom, P. R., Measuring the Interest Rate Risk, *Transactions of the Society of Actuaries*, 37, pp. 267-75.

Litterman, R. e Scheinkman, J. (1991), Common Factors Affecting Bond Returns, *The Journal of Fixed Income*, June, pp. 54-61.

Longstaff, F. e Schwartz, E. (1992a), Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General equilibrium Model, *The Journal of Finance*, 47, N° 4, September, pp. 1259-1282.

Longstaff, F. e Schwartz, E. (1992b), A Two-Factor Interest Rate Model and Contingent Claims Valuation, *The Journal of Fixed Income*, December, pp. 16-23.

Longstaff, F. e Schwartz, E. (1993), Implementation of the Longstaff-Schwartz Interest Rate Model, *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 7-14.

Lutz, F. (1940), The Structure of Interest Rates, *Quarterly Journal of Economics*, 55, pp. 36-63.

Macaulay, F. R. (1938), The Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856, New York, *NBER*, pp. 45-53.

Malkiel, B. G. (1966), *The Term Structure of Interest Rates*, Princeton.

Maloney, K. e Logue, D. (1989), Neglected Complexities in Structured Bond Portfolios, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, pp. 59-68.

Malz, A. (2000), Vega Risk and the Smile, The RiskMetrics Group, *Working Paper* 99-06, April.

Mann, S. V. e Ramanlal, P. (1997), The Relative Performance of Yield Curve Strategies, *The Journal of Portfolio Management*, 23, Nº.4, Summer, pp. 64-70.

Martellini, L. (2000), Efficient Option Replication in the Presence of Transaction Costs, *Review of Derivatives Research*, enviado para publicação

Martellini, L. e Priaulet, P. (2001), *Fixed-Income Securities: Dynamic Methods for Interest Rate Risk Pricing and Hedging*, Chichester, John Wiley & Sons.

McCoy, W. F. (1995), Bond Dynamic Hedging and Return Attribution: Empirical Evidence, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, pp. 93-101.

McCulloch, J. H. (1971), Measuring the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Business*, 44, January, pp. 19-31.

McCulloch, J. H. (1975), The Tax-Adjusted Yield Curve, *The Journal of Finance*, 30, Nº. 3, pp. 811-830.

Mehran, J. e Homaifar, G. (1993), Analytics of Duration and Convexity for Bonds with Embedded Options: The Case of Convertibles, *Journal of Business Finance & Accounting*, 20(1), January, pp. 107-113.

Merton, R. C. (1973), An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, *Econometrica*, 41, September, pp. 867-886.

Milgrom, P. R. (1985), Measuring the Interest Rate Risk, *Transactions of the Society of Actuaries*, 37, pp. 241-302.

Mina, J. e Ulmer, A. (1999), Delta-Gamma Four Ways, RiskMetrics Group, *Working Paper*, August.

- Modigliani, F. e Sutch, R. (1966), Innovations in Interest Rate Policy, *American Economic Review*, 56, pp. 178-97.
- Modigliani, F. e Sutch, R. (1967), Debt Management and the Term Structure of Interest Rates: An Analysis of Recent Experience, *Journal of Political Economy*, 75, pp. 569-89.
- Montrucchio, L. e Peccati, L. (1991), A Note on Shiu-Fisher-Weil Immunization Theorem, *Insurance: Mathematics and Economics*, 10, pp. 125-131.
- Moser, J. T. E Lindley, J. T. (1989), A Simple Formula for Duration: An Extension, *The Financial Review*, 24, N° 4, November, pp. 611-615.
- Munk, C. (1999), Stochastic Duration and Fast Coupon Bond Option Pricing in Multi-Factor Models, *Review of Derivatives Research*, 3, N° 2, pp. 157-181.
- Murphy, B. P. e Won, D. (1995), Valuation and Risk Analysis of International Bonds, in: Fabozzi, F., *Handbook of Fixed Income Securities*, 4° Edição, McGraw-Hill.
- Nawalkha, S. K. (1995), The Duration Vector: A Continuous-Time Extension to Default Free Interest Rate Contingent Claims, *Journal of Banking and Finance*, 19, pp. 1359-1378.
- Nawalkha, S. K. (1999), Duration Sixty Years Later, in: Nawalkha, S. K. e Chambers, D. R. (Editors), *Interest Rate Risk Measurement and Management*, New York, Institutional Investor.
- Nawalkha, S. K. e Chambers, D. R. (1996), An Improved Immunization Strategy: M-Absolute, *Financial Analyst Journal*, September/October, pp. 69-76.
- Nawalkha, S. K. e Chambers, D. R. (1997), The M-Vector Model: Derivation and Testing of Extensions to M-Square, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, pp. 92-97.
- Nawalkha, S. K. e Lacey, N. J. (1988), Closed-Form Solutions of Higher-Order Duration Measures, *Financial Analyst Journal*, November/December, pp. 82-84.

- Nawalkha, S. K. e Lacey, N. J. (1990), Generalized Solutions of Higher-Order Duration Measures, *Journal of Banking and Finance*, 14, pp. 1143-1150.
- Nawalkha, S. K. e Lacey, N. J. (1992), Immunizing Bond Portfolios in a Multiple Term Structure Economy, *The International Review of Economics and Finance*, Vol. 1, N. ° 3, pp. 235-246.
- Nawalkha, S. K., Lacey, N. J. e Schneeweis, T. (1990), Closed-Form Solution of Convexity and M-Square, *Financial Analyst Journal*, January-February, pp. 75-77.
- Neftci, S. N. (2000), *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, 2nd Edition.
- Nelson, J. e Schaefer, S. (1983), The Dynamics of the Term Structure of Interest Rates and Alternative Portfolio Immunization Strategies, in: Kaufman, G. G., Bierwag, G. O. e Toevs, A., editors, *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*, London, JAI Press Inc.
- Nelson, J. e Siegel, A. (1987), Parsimonious Modelling of Yield Curves, *Journal of Business*, 60, pp. 473-489.
- Pedersen, H., Shiu, E. e Thorlacious, A. (1989), Arbitrage-Free Pricing of Interest Rate Contingent Claims, *Transactions of The Society of Actuaries*, 41, pp. 231-279.
- Pereira, J. P. e Cassola, N. (1998), Immunization Under Single-Factor Models: An Application to Portugal, *Revista de Mercados e Activos Financeiros*, vol. 1, N°2, pp. 47-68.
- Phoa, W. (2001), Yield Curve Risk Factors: Domestic and Global Contexts, to appear in *The Practitioners Handbook of Financial Risk Management*.
- Phoa, W. e Shearer, M. (1997), A Note on Arbitrary Yield Curve Reshaping Sensitivities Using Key Rate Durations, *The Journal of Fixed Income*, December, pp. 67-71.

- Pichler, S. e Selitsch, K. (1999), A Comparison of Analytical Methodologies for Portfolios That Include Options, Vienna University of Technology, Department of Finance, *Working Paper*, December.
- Prisman, E. Z. (1986), Immunization as a Maxmin Strategy: A New Look, *Journal of Banking and Finance*, 10, pp. 491-509.
- Prisman, E. Z. e Shores, M. R. (1988), Duration Measures for Specific Term Structure Estimations and Applications to Bond Portfolio Immunization, *Journal of Banking and Finance*, 12, pp. 493-504.
- Prisman, E. Z. e Tian, Y. (1993), Duration Measures, Immunization and Utility Maximization, *Journal of Banking and Finance*, 17, pp. 689-707.
- Pritsker, M. (1996), Evaluating Value at Risk Methodologies: Accuracy Versus Computational Time, Wharton Financial Institutions Center Working Paper Series, *Working Paper* 96-48.
- Rebonato, R. (2000), *Interest-Rate Option models: Understanding, Analysing and Using Models for Interest-Rate Options*, Chichester, John Wiley & Sons, 2nd Edition.
- Redington, F. M. (1952), Review of the Principle of Life Office Valuations, *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 18, pp. 286-340.
- Reitano, R. R. (1989), A Multivariate Approach to Duration Analysis, *ARCH*, Vol. 2, pp. 97-181.
- Reitano, R. R. (1990), Non-Parallel Yield Curve Shifts and Durational Leverage, *The Journal of Portfolio Management*, Summer, pp. 62-67.
- Reitano, R. R. (1990a), A Multivariate Approach to Immunization Theory, *ARCH*, Vol. 2, pp. 261-312.

Reitano, R. R. (1991), Multivariate Duration Analysis, *Transactions of the Society of Actuaries*, 43, pp. 335-391.

Reitano, R. R. (1991a), Non-Parallel Yield Curve Shifts and Spread Leverage, *The Journal of Portfolio Management*, 17, Spring, pp. 82-87.

Reitano, R. R. (1991b), Multivariate Immunization Theory, *Transactions of the Society of Actuaries*, 43, pp. 392-438.

Reitano, R. R. (1992), Non-Parallel Yield Curve Shifts and Immunization, *The Journal of Portfolio Management*, 18, Spring, pp. 36-43.

Reitano, R. R. (1993), Non-Parallel Yield Curve Shifts and Convexity, *Transactions of the Society of Actuaries*, 44, pp. 479-507.

Reitano, R. R. (1993a), Multivariate Stochastic Immunization Theory, *Transactions of the Society of Actuaries*, 45, pp. 425-484.

Reitano, R. R. (1996), Non-Parallel Yield Curve Shifts and Stochastic Immunization, *The Journal of Portfolio Management*, Winter, pp. 71-78.

Rendleman, B. e Barter, B. (1980), The Pricing of Options on Debt Securities, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, March, pp. 11-24.

Rendleman, R. J. (1999), Duration-Based Hedging with Treasury Bond Futures, *The Journal of Fixed Income*, June, pp. 84-91.

Ricart, R. e Sicsic, P. (1995), Estimation d'une Structure par Terme des Taux d'Intérêt sur Donnée Françaises, *Bulletin de la Banque de France* N°. 22, October.

Risk Publications (1996), *Vasicek and Beyond: Approaches to Building and Applying Interest Rate Models*, edited by Lane Houghton, London, Risk Publications.

- Ritchken, P. e Boenawan, K. (1990), On Arbitrage-Free Pricing of Interest Rate Contingent Claims, *The Journal of Finance*, March, pp. 259-264.
- Ritchken, P. e Sankarasubramanian, L. (1995), Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure, *Mathematical Finance*, 5, pp. 55-72.
- Rzadkowski, G. e Zaremba, L. S. (2000), New Formulas for Immunizing Durations, *The Journal of Derivatives*, Winter, pp. 28-36.
- Samuelson, P. A. (1945), The Effect of Interest Rate Increases on the Banking System, *American Economic Review*, March, pp. 16-27.
- Schaefer, S. e Schwartz, E. (1984), A Two Factor Model of the Term Structure: An Approximate Analytical Solution, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, pp. 413-424.
- Schaefer, S. e Schwartz, E. (1987), Time-Dependent Variance and the Pricing of Bond Options, *The Journal of Finance*, 42, N. ° 5, pp. 1113-1128.
- Selby, M. e Strickland, C. (1995), Computing the Fong and Vasicek Pure Discount Bond Price Formula, *The Journal of Fixed Income*, September, pp. 78-84.
- Shea, G. S. (1984), Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, N°3, September, pp. 253-269.
- Shea, G. S. (1985), Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note, *The Journal of Finance*, 40, N. ° 1, March, pp. 319-325.
- Shiller, R. e McCulloch, J. (1990), The Term Structure of Interest Rates, in Friedman, B. e Hahn, F., *Handbook of Monetary Economics*, Volume I, Elsevier Science Publishers, pp. 627-722.

- Shimko, D. (1997), Var for Corporates, in Grayling, S., editor, *VAR: Understanding and Applying Value-at-Risk*, London: Risk, pp. 345-347.
- Shiu, E. (1987), On the Fisher-Weil Immunization Theorem, *Insurance: Mathematics and Economics*, 6, pp. 259-266.
- Shiu, E. (1988), Immunization of Multiple Liabilities, *Insurance: Mathematics and Economics*, 7, pp. 219-224.
- Shiu, E. (1990), On Redington's Theory of Immunization, *Insurance: Mathematics and Economics*, 9, pp. 171-175.
- Siegel, D. R. e Siegel, D. F. (1990), *Futures Markets*, The Dryden Press.
- Singh, M. K. (1997), Value at Risk Using Principal Components Analysis, *The Journal of Portfolio Management*, Fall, pp. 101-112.
- Solnik, B., Bovarelle, C. e Le Fur, Y. (1996), International Market Correlation and Volatility, *Financial Analyst Journal*, September/October, pp. 17-34.
- Strickland, C. (1996a), A Comparison of Diffusion Models of the Term Structure, *The European Journal of Finance*, 2, pp. 103-123.
- Strickland, C. (1996b), A Comparison of Models for Pricing Interest Rate Derivative Securities, *The European Journal of Finance*, 2, pp. 261-287.
- Strong, R. A. (1990), Using Intuition from Elementary Physics to Explain Bond Duration, *The Engineering Economist*, Vol. 35, N°4, pp. 295-304.
- Svensson, L. E. O. (1994), Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-4, *CEPR Discussion Paper Series* n. ° 1051.

Svensson, L. E. O. (1995), Estimating Forward Interest Rates with an Extended Nelson & Siegel Method, *Sveriges Riksbank Quarterly Review*, N° 3, pp. 13-26.

Thomas, L. e Willner, R. (1997), Measuring the Duration of an Internationally Diversified Bond Portfolio, *The Journal of Portfolio Management*, Fall, pp. 93-99.

Tilley, J. A. (1980), The Matching of Asset and Liabilities, *Transactions of the Society of Actuaries*, 32, pp 263-304.

Toft, K. (1996), On the Mean-Variance trade-off in Option Replication with Transaction Costs, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, pp. 233-263.

Tzeng, L., Wang, J. e Soo, J. (2000), Surplus Management Under a Stochastic Process, *The Journal of Risk and Insurance*, 67, N° 3, pp. 451-462.

Uberti, M. (1997), A Note on Shiu Immunization Results, *Insurance: Mathematics and Economics*, 21, pp. 195-200.

Van Horne, J. (1965), Interest-Rate Risk and the Term Structure of Interest Rates, *Journal of Political Economy*, August, pp. 344-351.

Vasicek, O. A. (1977), An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*, N° 5, pp. 177-188.

Vasicek, O. A. e Fong, H. G. (1982), Term Structure Modelling Using Exponential Splines, *The Journal of Finance*, 37, N° 2, May, pp. 339-348.

Venkataraman, S. (1997), Value at Risk for a Mixture of Normal Distributions: The use of Quasi-Bayesian Estimation Techniques, Federal Reserve Bank of Chicago, *Economic Perspectives*, March/April, pp. 2-13.

Vetzal, K. R. (1994), A Survey of Stochastic Continuous Time Models of the Term Structure of Interest Rates, *Insurance: Mathematics and Economics*, 14, pp. 139-161.

- Whalley, A. e Wilmott, P. (1993), Counting The Costs, *Risk*, 6 (10), October, pp. 59-66.
- Willner, R. (1996), A New Tool for Portfolio Managers: Level, Slope, and Curvature Durations, *The Journal of Fixed Income*, June, pp. 48-59.
- Wilmott, P. (1998), *Derivatives: The Theory and Practise of Financial Engineering*, Chichester, England: John Wiley & Sons.
- Wilson, T. (1993), Infinite Wisdom, *Risk*, N° 6, June, pp. 37-45.
- Wilson, T. (1994), Plugging the GAP, *Risk*, N° 10, October, pp. 74-80.
- Winkelmann, K. (1989), Uses and Abuses of Duration and Convexity, *Financial Analyst Journal*, September/October, pp. 72-75.
- Wu, X. (2000), A New Stochastic Duration Based on The Vasicek and CIR Term Structure Theories, *Journal of Business Finance and Accounting*, 27(7), pp. 911-932.
- Zangari, P. (1996), A VAR Methodology for Portfolios that Include Options, *Riskmetrics Monitor*, First Quarter, pp. 4-12
- Zangari, P. (1996a), An Improved Methodology for Measuring VAR, *Riskmetrics Monitor*, Second Quarter, pp. 12-29.
- Zangari, P. (1996b), How Accurate is the Delta-Gamma Methodology?, *Riskmetrics Monitor*, Third Quarter, pp. 12-29.
- Zaremba, L.S. (1998), Construction of a K-Immunization Strategy with the Highest Convexity, *Control & Cybernetics*, Vol. 27, N° 1, pp. 135-144.
- Zaremba, L.S. e Smolenki (2000), How to Find a Bond Portfolio with the Highest Convexity in a Class of Fixed Duration Portfolios, *Bulletin of Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, Vol. 48, N° 2, pp. 279-286.

ANEXOS

ANEXO 1 – Metodologia Geral da Estratégia de Cobertura (*Hedging*)

O risco de uma carteira de obrigações tem origem na possibilidade dos factores de risco se alterarem no decurso do tempo. A implementação da estratégia de cobertura exige assim, em primeiro lugar, a identificação da forma como os factores de risco variam no tempo. Na prática, métodos directos e indirectos podem ser utilizados, diferindo apenas na forma como identificam os factores de risco.

Considere-se a seguinte notação:

V_t = Valor no momento t da carteira a ser coberta;

F_t = Valor no momento t da carteira de cobertura, composta habitualmente por posições em obrigações clássicas e em futuros;

f_t^j = Valor no momento t do j^{esimo} instrumento de cobertura, com $j = 1 \dots J$;

q_t^j = Quantidade (n.º de unidades) investida no j^{esimo} instrumento de cobertura;

$a_t^k = (a_t^k)_{k=1 \dots K}^T$ valor no momento t dos K factores que determinam a estrutura de risco da carteira.

Nestas condições, o valor de F_t é dado por

$$F_t = \sum_{j=1}^J q_t^j f_t^j \quad (\text{A1.1})$$

A segunda etapa na implementação da estratégia envolve a quantificação do impacto produzido por uma alteração dos factores de risco no valor da carteira. A solução habitual passa pelo recurso a uma expansão em série de Taylor (aproximação linear)³⁹⁸ ou, nos casos em que o comportamento dos factores de risco é estocástico, pelo uso do

⁽³⁹⁸⁾ Alguns autores, nomeadamente Reitano (1991) e Barber (1995), propõem a utilização de uma aproximação exponencial usando uma expansão em série de Taylor para o logaritmo natural do valor da carteira. Para mais detalhes veja-se o ponto 6.1.

Lema de Itô. Para a generalidade dos problemas é suficiente a realização de uma expansão de 2ª ordem. Designando por $da_t^k = (da_t^1, \dots, da_t^K)^T$ o vector de variações nos factores de risco a_t , entre os momentos t e $t + dt$, temos que:

$$dV(a_t) = \nabla V(a_t)^T \cdot da_t + \frac{1}{2} da_t^T \cdot \nabla^2 V(a_t) \cdot da_t + \varepsilon_t \quad (A1.2)$$

E, para $j = 1 \dots J$

$$df^j(a_t) = \nabla f^j(a_t)^T \cdot da_t + \frac{1}{2} da_t^T \cdot \nabla^2 f^j(a_t) \cdot da_t + \gamma_t \quad (A1.3)$$

onde ∇f e $\nabla^2 f$ denotam, respectivamente, o *gradiente* e a *matriz hessiana* para a função f , ε_t e γ_t representam os termos residuais na expansão de Taylor, e \cdot simboliza o produto interno de dois vectores. O principal objectivo da estratégia de cobertura é o de conseguir que as variações no valor de F_t e V_t , em resultado de modificações nos factores de risco, sejam tais que o valor global da carteira não se altere, isto é:

$$dF(a_t) = \sum_{j=1}^J q_t^j df^j(a_t) = -dV(a_t) \quad (A1.4)$$

Se assumirmos que os choques sobre os factores de risco são de magnitude reduzida, a variação no valor da carteira pode ser aproximada por $dV(a_t) \cong \nabla V(a_t)^T \cdot da_t$. Nesse caso, escolher a carteira de cobertura equivale a seleccionar as quantidades óptimas q_t^j a investir em cada activo de modo a que o seguinte sistema de equações seja satisfeito:

$$\sum_{j=1}^J q_t^j \nabla f^j(a_t) = -\nabla V(a_t) \quad (A1.5)$$

Para garantir que o sistema tem uma solução única, o número de instrumentos de cobertura (J) deve ser igual ao número de factores de risco (K). Se a este juntarmos a condição inicial ($t = 0$) de autofinanciamento da carteira, isto é:

$$V_0 = \sum_{j=1}^{K+1} q_0^j f_0^j \quad (\text{A1.6})$$

Então serão necessários $J = K + 1$ instrumentos de cobertura. Se, por outro lado, a estratégia for delineada por forma a captar efeitos de 2ª ordem, a solução óptima deve satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^J q_t^j \nabla f^j(a_t) = -\nabla V(a_t) \\ \sum_{j=1}^J q_t^j \nabla^2 f^j(a_t) = -\nabla^2 V(a_t) \end{cases} \quad (\text{A1.7})$$

A implementação da estratégia exigiria, neste último caso, $J = 2K$ instrumentos de cobertura ou, incluindo a condição inicial de autofinanciamento, $J = 2K + 1$. A estratégia de cobertura é, à semelhança da estratégia de imunização, uma estratégia dinâmica que requer ajustamentos contínuos na composição da carteira. Também neste caso a existência de custos de transacção consubstancia um claro *trade-off* entre a qualidade e o custo da cobertura. Relevo, por fim, para os efeitos induzidos pelo relaxamento de algumas hipóteses simplificadoras implícitas na metodologia que acabámos de apresentar: (i) importância dos custos de financiamento da estratégia, (ii) possibilidade ilimitada de realizar vendas a descoberto (*short-selling*)³⁹⁹, (iii) restrições na quantidade do activo que pode ser transaccionada no mercado.

(399) Esta assunção afigura-se-nos menos problemática uma vez que na generalidade dos mercados desenvolvidos a limitação das vendas a descoberto pode ser ultrapassada tomando, por exemplo, posições nos mercados de futuros.

ANEXO 2 – Derivação do Modelo do Vector de Duração

Considere-se em primeiro lugar a representação da EPTJ dada por (6.1). Suponhamos agora que, imediatamente após a realização do investimento, a EPTJ sofre um choque aleatório não paralelo e não infinitesimal com a nova curva de taxas, $i'(t)$, a ser dada por:

$$i'(t) = i(t) + \Delta i(t) \quad (\text{A2.1})$$

$$\text{onde:} \quad \Delta i(t) = \Delta A_0 + \Delta A_1 t + \Delta A_2 t^2 + \dots + \Delta A_k t^k \quad (\text{A2.2})$$

e onde ΔA_j , $j = 0, \dots, k$, denota os choques sobre o nível, sobre a inclinação, e sobre outros parâmetros da EPTJ. Se substituirmos as equações (6.1) e (A2.1) na expressão (6.3) para o preço da obrigação antes $[B_0]$ e após $[B_t]$ o choque de taxa de juro, respectivamente, obtém-se, após alguma manipulação algébrica:

$$\Delta B = B_t - B_0 = \sum_{t=1}^T c_t \cdot e^{-t \cdot i(t)} [e^{-t \cdot \Delta i(t)} - 1] \quad (\text{A2.3})$$

Efectuando uma expansão em série de Taylor para $e^{-t \cdot \Delta i(t)}$, i.e.,

$$e^{-t \cdot \Delta i(t)} = \left\{ 1 + [-t \cdot \Delta i(t)] + \frac{[-t \cdot \Delta i(t)]^2}{2!} + \frac{[-t \cdot \Delta i(t)]^3}{3!} + \dots + \right\} \quad (\text{A2.4})$$

e substituindo em (A2.3) demonstra-se, fazendo uso da definição de $\Delta i(t)$ avançada em (A2.2), que a taxa de retorno (instantâneo) da obrigação, $\Delta B(i)/B(i)$ é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta B(i)}{B(i)} = & -D(1)[\Delta A_0] - D(2) \left[\Delta A_1 - \frac{(\Delta A_0)^2}{2} \right] - D(3) \left[\Delta A_2 - (\Delta A_0)(\Delta A_1) + \frac{(\Delta A_0)^3}{3!} \right] - \\ & \dots - D(m) \left[\Delta A_{m-1} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{(\Delta A_0)^m}{m!} \right] \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

onde:

$$D(m) = \frac{1}{B(i)} \sum_{t=1}^T t^m c_t \cdot e^{-t \cdot i(t)} \quad (\text{A2.6})$$

ANEXO 3 – Breve Descrição da Metodologia dos Componentes Principais⁴⁰⁰

A *Análise de Componentes Principais* (ACP) é uma variante do método estatístico da *análise de factores*. O seu principal objectivo é o de explicar o comportamento de um conjunto alargado de variáveis observáveis (choques de taxa de juro), usando um número reduzido de variáveis implícitas não observáveis (factores).⁴⁰¹ Do ponto de vista formal, a técnica consiste em transformar um conjunto de m variáveis correlacionadas num conjunto de p variáveis ortogonais, reproduzindo toda a informação contida na matriz de variâncias e covariâncias (ou de correlação⁴⁰²) original, ou seja:

$$\begin{matrix} X_t - \mu & = & L & \times & F_t & + & \varepsilon_t \\ (m \times 1) & & (m \times p) & & (p \times 1) & & (m \times 1) \end{matrix} \quad (\text{A3.1})$$

onde: $E(X_t) = \mu$ $E(F_t) = 0$ $E(\varepsilon_t) = 0$ $\text{Cov}(F_t) = I$ $\text{Cov}(\varepsilon_t) = \Lambda$,

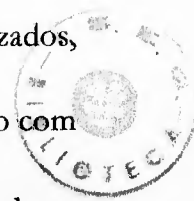
e onde X_t , F_t e L denotam, respectivamente, a matriz de variações nas taxas de juro, a matriz de factores, e a matriz de coeficientes (*factor loadings*) de elemento típico L_{pm} .

Designemos por Ω a matriz de correlação entre as taxas de juro para os diferentes prazos. A matriz Ω é, por definição, quadrada e simétrica, pelo que o *método da*

⁽⁴⁰⁰⁾ Para uma descrição mais pormenorizada da metodologia dos componentes principais aconselha-se a leitura de Rebonato (2000) e Martellini e Priaulet (2001).

⁽⁴⁰¹⁾ Os factores são variáveis não observáveis que representam todas as fontes de variação nas taxas de juro. Entre o conjunto de variáveis económicas susceptíveis de influenciar as taxas de juro encontram-se, segundo Bliss (1997), a procura e a oferta de moeda, os anúncios de taxa de desemprego e inflação, e as alterações na aversão ao risco por parte dos participantes nos mercados em consequência de modificações nas perspectivas de crescimento económico. O aspecto fulcral da ACP é o de que a multiplicidade de influências que afectam regularmente o curso das taxas de juro é resumida a um conjunto diminuto de variáveis, denominadas de factores.

⁽⁴⁰²⁾ A opção pela matriz de variâncias e covariâncias ou pela matriz de correlação não é indiferente para a qualidade da análise. De facto, Bühlér e Zimmermann (1996) demonstram que a matriz de correlação é, numa análise temporal, mais estável do que a matriz de variâncias e covariâncias, pelo que a extracção dos factores a partir da primeira se revela mais adequada à implementação de estratégias de imunização. Na prática, a opção pela matriz de correlação significa que a ACP é efectuada sobre as variações estandardizadas nas taxas de juro.



*diagonalização de matrizes*⁴⁰³ garante a existência de Q_m vectores próprios⁴⁰⁴ normalizados, ortogonais, e λ_m valores próprios positivos, ambos satisfazendo a seguinte relação com Ω : $\Omega = Q\Lambda Q^T$, onde $Q = (Q_1, \dots, Q_m)$ e $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Admitindo que os valores próprios são ordenados por ordem decrescente da sua magnitude, o primeiro componente principal, $\vec{N}_1 = Q_1$, não é mais do que o vector de direcção para os choques de taxa de juro cujos múltiplos, $\Delta\vec{N}_1$, mais contribuem para a minimização da variância do erro da regressão (A3.1), no sentido que lhe é dado pelo método dos mínimos quadrados ordinários.

Os múltiplos do segundo componente, $\vec{N}_2 = Q_2$, são aqueles que melhor aproximam os resíduos que restam após a introdução de \vec{N}_1 , e assim sucessivamente para os demais componentes. Em suma, o método decompõe variações históricas nas taxas de juro numa combinação linear dos vectores de direcção $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \dots, \vec{N}_m$, de modo a que os resíduos de (A3.1) sejam mínimos.

Por construção, a variância total das taxas de juro é dada pela soma de todos os valores próprios de Ω . Significa isto que a contribuição do factor p para a explicação da volatilidade total, w_p , é dada por $w_p = \frac{\lambda_p}{\sum_{k=1}^m \lambda_k}$. Mais, como a *norma* dos componentes principais é unitária, a contribuição do factor p para a explicação da variação na taxa

de juro com maturidade m , w_{pm} , é calculada fazendo $w_{pm} = \frac{L_{pm}^2}{\sum_{k=1}^m L_{km}^2}$.

(403) Para mais detalhes sobre este método veja-se, por exemplo, Greene (2000).

(404) Deve realçar-se, neste ponto, que a decomposição produzida pela análise de componentes principais não é única. Significa isto que uma rotação ortogonal dos factores conduzirá a uma mesma decomposição da matriz de correlações. Para uma ilustração desta técnica veja-se Bliss (1997).

ANEXO 4 – Raciocínio de Arbitragem e Equação Diferencial

Fundamental para o Preço das Obrigações

Retomemos o processo estocástico seguido pela taxa de juro *spot* (instantânea), $r(t)$:

$$dr(t) = \mu_r(r, t)dt + \sigma_r(r, t)dW_t \quad (\text{A4.1})$$

Da aplicação do *Lema de Itô*,⁴⁰⁵ e após substituição da equação (A4.1), resulta a seguinte equação diferencial estocástica para o preço da obrigação $P(t, T)$:⁴⁰⁶

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= \left[\frac{dP}{dr} \mu_r + \frac{dP}{dt} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{d^2 P}{dr^2} \right] dt + \sigma_r \frac{dP}{dr} dW_t \\ &\equiv \mu(t, T)dt + v(t, T)dW_t \end{aligned} \quad (\text{A4.2})$$

Como se observa o retorno (instantâneo) da obrigação depende de uma componente determinística, associada ao termo multiplicado por dt , e de uma componente aleatória, que enquadra o risco de taxa de juro a que está exposto o título.⁴⁰⁷

A formulação do raciocínio de arbitragem na derivação da equação fundamental para $P(t, T)$ é similar à adoptada por Black e Scholes (1973) na obtenção do preço de opções. Uma diferença transcendental deve, contudo, ser assacada: enquanto que na abordagem de Black e Scholes a carteira inclui dois activos (a opção de compra e o respectivo activo subjacente) dependentes da mesma fonte de incerteza, sendo por isso possível combiná-los de forma adequada no sentido de eliminar a componente aleatória

⁽⁴⁰⁵⁾ Para mais detalhes sobre as características dos processos estocásticos de Wiener e sobre o Lema de Itô, recomenda-se a leitura de Neftci (2000).

⁽⁴⁰⁶⁾ Simplificámos ligeiramente a notação por forma a tornar a demonstração mais elegante.

⁽⁴⁰⁷⁾ Repare-se que dividindo ambos os lados da equação (A4.2) pelo preço da obrigação é possível constatar que o risco associado a choques não antecipados sobre a EPTJ é proporcional ao termo $(dP/dr)/P$, sendo por isso legítima a sua interpretação em termos de duração, neste caso *duração estocástica*.

e tornar a carteira isenta de risco, neste caso tal não é exequível. Tal é assim porquanto a obrigação não é mais do que um derivado sobre um activo subjacente que não é transaccionado (a taxa de juro é um número!), e contra o qual não é possível efectuar a cobertura.⁴⁰⁸

Neste quadro, a única forma de construir uma carteira isenta de risco passa por efectuar a cobertura de uma obrigação, com outra obrigação, de maturidade distinta. Tal é possível na medida em que se admite que a única característica que distingue duas obrigações é a sua maturidade, sendo que no demais se espera que estas sejam influenciadas pelas mesmas flutuações na variável de estado. Caminhando nesse sentido, considere-se a carteira $\Pi(t)$ formada por uma unidade da obrigação $P(t, r, T_1)$ e por θ unidades da obrigação $P(t, r, T_2)$, com $T_2 > T_1 > t$:

$$\Pi(t) = P(t, T_1) + \theta P(t, T_2) \quad (\text{A4.3})$$

Aplicando novamente o Lema de Itô, neste caso a $\Pi(t)$, ficamos com:

$$\begin{aligned} d\Pi(t) &= [\mu(t, T_1) + \theta\mu(t, T_2)]dt + \left[\frac{dP(t, T_1)}{dr} \sigma_r + \theta \frac{dP(t, T_2)}{dr} \sigma_r \right] dW_t \\ &\equiv \mu_{\Pi} dt + \sigma_{\Pi} dW_t \end{aligned} \quad (\text{A4.4})$$

(408) Existem obviamente outras diferenças entre a derivação de Black e Scholes para opções sobre acções e o raciocínio de arbitragem aplicado a derivados de taxa de juro. Por exemplo, enquanto que na derivação clássica de Black e Scholes a taxa de financiamento é considerada, sem grandes prejuízos para o resultado final, constante, a manutenção desta hipótese no caso de activos sensíveis ao nível de taxas de juro revela-se, claramente, insustentável. Acresce que a hipótese de volatilidade constante para as acções é substituída por uma estrutura por prazos para a volatilidade das taxas de juro. Refira-se, por último, que enquanto que na derivação de Black e Scholes as condições de não arbitragem são suficientes para eliminar a necessidade de modelizar e calibrar a tendência (*drift*) do processo estocástico seguido pelo preço das acções (o que faz com que o preço da opção dependa apenas do nível de volatilidade), neste caso a introdução das condições de não arbitragem, não apenas não elimina a tendência do processo estocástico das taxas de juro, como ainda adiciona uma nova variável: o preço de mercado do risco. Ambos os parâmetros devem então ser estimados (ou obtidos por calibragem) se o objectivo for o de usar o modelo para efectuar o *pricing* nos mercados.

A eliminação da componente aleatória no retorno da carteira é conseguida seleccionando a quantidade θ que satisfaz a seguinte igualdade: $\sigma_{\Pi} = 0$, ou ainda:

$$\theta = -\frac{dP(t, T_1)/dr}{dP(t, T_2)/dr} = -\frac{v(t, T_1)}{v(t, T_2)} \quad (\text{A4.5})$$

onde, na última fracção, se fez uso da definição de $v(t, T)$ obtida em (A4.2). Nestas condições, o retorno da carteira num intervalo de tempo reduzido é perfeitamente determinístico e dado por:

$$d\Pi(t) = dP(t, T_1) - \frac{v(t, T_1)}{v(t, T_2)} dP(t, T_2) \quad (\text{A4.6})$$

devendo, por definição, obter uma rendibilidade igual à taxa de juro sem risco, ou seja:

$$d\Pi(t) = r(t)\Pi(t)dt \quad (\text{A4.7})$$

Se igualarmos as expressões (A4.6) e (A4.7) obtemos, após alguma manipulação algébrica, a seguinte equação:

$$\frac{\mu(t, T_1) - r(t)P(t, T_1)}{v(t, T_1)} = \frac{\mu(t, T_2) - r(t)P(t, T_2)}{v(t, T_2)} \quad (\text{A4.8})$$

A igualdade obtida em (A4.8) é válida quaisquer que sejam as obrigações seleccionadas para integrar a carteira. Deste modo, o rácio deve ser igual a uma quantidade $\lambda(t, r)$, possivelmente dependente de t e r , mas independente da maturidade, ou seja:

$$\lambda(t, r) = \frac{\mu(t, T) - r(t)P(t, T)}{v(t, T)} \quad (\text{A4.9})$$

Este resultado, deveras importante, permite-nos concluir que a média do retorno absoluto⁴⁰⁹ efectivo de uma obrigação, $\mu(t,T)$, diverge do seu valor esperado num contexto de neutralidade face ao risco $r(t)P(t,T)$, por uma quantidade que é proporcional à volatilidade (ao risco) do título, isto é:

$$\mu(t,T) = r(t)P(t,T) + \lambda(t,r)v(t,T) \quad (\text{A4.10})$$

Este argumento é suficiente para justificar a habitual interpretação de $\lambda(t,r)$ como *preço de mercado do risco*.⁴¹⁰ O passo final, necessário à eliminação do termo correspondente ao valor esperado do processo estocástico seguido pelo retorno de uma obrigação, é dado igualando o valor de $\mu(t,T)$ nas equações (A4.2) e (A4.10). Obtém-se, em consequência:

$$\frac{dP}{dr}[\mu_r(r,t) - \lambda(r,t)\sigma_r(r,t)] + \frac{dP}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{dr^2} \sigma_r^2(r,t) - rP = 0 \quad (\text{A4.11})$$

Esta expressão define a *equação diferencial parcial fundamental* a ser respeitada pelo preço de uma obrigação de cupão zero, adicionadas as indispensáveis condições limite (ou de fronteira).

(⁴⁰⁹) A representação do valor esperado e da volatilidade em termos percentuais em (A4.2) permite obter uma expressão análoga à derivada em (A4.9).

(⁴¹⁰) Se os investidores forem, por exemplo, avessos ao risco, o valor de $\lambda(t,r)$ deve ser positivo e representa nesse caso o excesso de retorno exigido em compensação pelo risco adicional que se assume ao adquirir uma obrigação de cupão zero. Nos casos em que os investidores revelam neutralidade (preferência) pelo risco, o valor do prémio de risco será obviamente nulo (negativo). Nos casos em que o prémio é nulo, encontramos, no entender de Cox, Ingersoll e Ross (1981) no contexto da chamada *hipótese de expectativas locais*. Como explicita Rebonato (2000), o raciocínio de não arbitragem não é suficiente para determinar o sinal do preço de mercado do risco. Trata-se, no fundo, de uma variável não observável. Neste sentido, é usual relacionar-se este indicador com a medida de aversão relativa ao risco definida por Arrow-Pratt, clarificando, deste modo, a sua dependência face às preferências (expressas por uma função utilidade) e face à riqueza dos investidores.

ANEXO 5 – Segmentação dos Resultados da Estimação da Equação
de Nelson-Siegel-Svensson por Nível de β_0

Segmento I: Valores *Elevados* para β_0 ($\beta_0 \geq 10\%$) 520 Observações

A – Principais Indicadores Estatísticos

	β_0	β_1	β_2	β_3	τ	θ
Média	11,32	-1,53	-0,85	2,39	1,33	0,06
Desvio Padrão	0,75	1,87	4,05	8,65	1,13	0,09
Mínimo	10,00	-8,43	-3,87	-45,14	0,01	0,00
Máximo	15,41	16,61	13,76	160,93	8,68	0,51

B – Tendências Estatísticas - Percentagem do Tempo em que:

Valor		β_1	β_2	β_3
	Positivo	19,2	41,9	44,6
	Negativo	80,8	58,1	0,8
	Nulo	0,0	0,0	54,6

$\beta_1 > 0$		$\beta_1 < 0$		$\beta_1 > 0$			$\beta_1 < 0$		
$\beta_2 > 0$	$\beta_2 < 0$	$\beta_2 > 0$	$\beta_2 < 0$	$\beta_3 > 0$	$\beta_3 < 0$	$\beta_3 = 0$	$\beta_3 > 0$	$\beta_3 < 0$	$\beta_3 = 0$
1,9	17,3	40,0	40,8	10,8	0,6	7,9	33,8	0,2	46,7

Segmento II: Valores *Intermédios* para β_0 ($7\% < \beta_0 < 10\%$) 496 Observações

A – Principais Indicadores Estatísticos

	β_0	β_1	β_2	β_3	τ	θ
Média	8,85	-1,26	-4,90	1,68	1,79	0,09
Desvio Padrão	0,91	1,42	4,58	5,44	0,75	0,2
Mínimo	7,01	-4,81	-40,18	-2,98	0,08	0,00
Máximo	10,00	2,47	7,80	43,42	12,06	1,00

B – Tendências Estatísticas - Percentagem do Tempo em que:

Valor		β_1	β_2	β_3
	Positivo	20,2	1,2	27,6
	Negativo	79,8	98,8	4,2
	Nulo	0,0	0,0	68,2

$\beta_1 > 0$		$\beta_1 < 0$		$\beta_1 > 0$			$\beta_1 < 0$		
$\beta_2 > 0$	$\beta_2 < 0$	$\beta_2 > 0$	$\beta_2 < 0$	$\beta_3 > 0$	$\beta_3 < 0$	$\beta_3 = 0$	$\beta_3 > 0$	$\beta_3 < 0$	$\beta_3 = 0$
0,2	20,0	1,0	78,8	11,7	0,6	7,9	15,9	3,6	60,3

Segmento III: Valores *Baixos* para β_0 ($\beta_0 \leq 7\%$)

506 Observações

A – Principais Indicadores Estatísticos

	β_0	β_1	β_2	β_3	τ	θ
Média	5,77	-1,83	-2,89	0,14	1,96	0,04
Desvio Padrão	0,55	1,02	1,11	0,7	1,1	0,15
Mínimo	4,77	-4,21	-7,29	-2,44	0,76	0,00
Máximo	6,95	-0,41	6,17	5,82	12,68	1,43

B – Tendências Estatísticas - Percentagem do Tempo em que:

Valor		β_1	β_2	β_3
	Positivo	0,0	0,6	21,4
	Negativo	100,0	99,4	6,7
	Nulo	0,0	0,0	71,9

$\beta_1 > 0$		$\beta_1 < 0$		$\beta_1 > 0$			$\beta_1 < 0$		
$\beta_2 > 0$	$\beta_2 < 0$	$\beta_2 > 0$	$\beta_2 < 0$	$\beta_3 > 0$	$\beta_3 < 0$	$\beta_3 = 0$	$\beta_3 > 0$	$\beta_3 < 0$	$\beta_3 = 0$
0,0	0,0	0,6	99,4	0,0	0,0	0,0	21,4	6,7	71,9

ANEXO 6 – Características Técnicas das Obrigações do Tesouro (OT's)
Utilizadas no Estudo Empírico

Valor Mobiliário	Valor Nominal	Cupão			
		Taxa (%)	Period. Pagam	Dia	Mês
OT Setembro 91-94	10.000\$	16,25	Semestral	23	Mar / Set
OT Abril 91-95	10.000\$	17	Semestral	23	Abr / Out
OT Junho 91-96	10.000\$	16	Semestral	23	Jun / Dez
OT Janeiro 92-95	10.000\$	13,5	Semestral	23	Jan / Jul
OT Dezembro 92-95	10.000\$	13,5	Semestral	23	Jun / Dez
OT Dezembro 92-97	10.000\$	13	Semestral	23	Jun / Dez
OT Janeiro 93-96	10.000\$	12,75	Semestral	23	Jan / Jul
OT Janeiro 93-98	10.000\$	12,5	Semestral	23	Jan / Jul
OT Abril 93-00	10.000\$	11,875	Semestral	23	Abr / Out
OT Junho 93-03	10.000\$	10,625	Semestral	23	Jun / Dez
OT Janeiro 94-97	10.000\$	8,875	Anual	23	Jan
OT Janeiro 94-99	10.000\$	8,375	Anual	23	Jan
OT Janeiro 94-04	10.000\$	8,875	Anual	23	Jan
OT Fevereiro 95-98	10.000\$	11,625	Anual	23	Fev
OT Fevereiro 95-00	10.000\$	11,875	Anual	23	Fev
OT Fevereiro 95-05	10.000\$	11,875	Anual	23	Fev
OT Fevereiro 96-06	10.000\$	9,5	Anual	23	Fev
OT Março 96-01	10.000\$	8,75	Anual	23	Mar
OT Março 96-99	10.000\$	8,5	Anual	23	Mar
OT Fevereiro 97-07	10.000\$	6,625	Anual	23	Fev
OT Março 97-00	10.000\$	5,375	Anual	23	Mar
OT Março 97-02	10.000\$	5,75	Anual	23	Mar
OT Abril 98-03	10.000\$	4,8125	Anual	23	Abr
OT Junho 98-08	10.000\$	5,375	Anual	23	Jun
OT Setembro 98-13	10.000\$	5,45	Anual	23	Set

Notas: Na 1ª coluna é indicado o mês e o ano de emissão-vencimento do valor mobiliário. A 4ª coluna evidencia a periodicidade de pagamento do cupão (semestral, anual). A taxa de cupão está expressa em termos anualizados. O vencimento dos cupões ocorre sempre no dia 23 do mês referenciado na 6ª coluna, excepto nos casos em que este não coincida com um dia útil, situação em que o vencimento é feito no dia de negociação imediatamente anterior.

ANEXO 7 - Principais Resultados dos Testes de Imunização Considerando Reajustamentos Semestrais

	Média TRE (%)	TRR - TRE (em pontos base)					RFRM	Soma dos Desvios			
		% Pos.	Média	Assimetria	Curtose	Máximo		Mínimo	ABS	NEG	
Estratégias de controle											
Maturidade	10,65	3,8	-94	0,31	-1,22	7	-172	109,1	109,1	2.462	-2.455
Maturity-Bullet	10,65	0,0	-64	0,18	-1,13	-9	-105	70,2	70,2	1.663	-1.663
Maturity-Barbell	10,65	7,7	-65	0,68	-0,43	35	-127	78,9	78,4	1.807	-1.743
Modelo M-Vector											
M(1)	10,65	3,8	-89	1,08	4,79	0	-142	93,1	93,1	2.325	-2.325
M(2)	10,65	11,5	-24	1,80	6,47	75	-73	36,2	33,0	802	-718
M(3)	10,65	23,1	-20	1,77	6,00	90	-64	35,7	30,9	713	-612
M(4)	10,65	7,7	-29	0,53	4,49	63	-94	40,3	38,3	898	-820
M(5)	10,65	3,8	-44	0,04	2,60	39	-107	52,7	52,2	1.232	-1.193
M(6)	10,65	11,5	-37	-1,22	7,21	53	-167	51,0	49,9	1.082	-1.017
M(7)	10,65	7,7	-40	-2,11	11,27	107	-283	71,7	68,5	1.284	-1.160

Notas: Todos os valores apresentados estão expressos em pontos base, excepto aqueles que se referem à média da TRE e à percentagem do número total de simulações em que a TRR foi superior à TRE que se encontram em percentagem. No total foram realizadas 26 simulações para cada um dos modelos, considerando horizontes temporais de investimento de 4 anos.

- Legenda:
- Média TRE

% Pos

Soma dos Desvios (ABS)

Soma dos Desvios (NEG)
- : - Média das TRE para o conjunto das 26 simulações

- Percentagem do número total de simulações em que a TRR foi superior à TRE

- Soma dos desvios absolutos da TRR relativamente à TRE

- Soma dos desvios da TRR relativamente à TRE com sinal negativo

ANEXO 8A: Volatilidade (Medida pelo RMSD) das Estratégias ao Longo do HTI

A – Reajustamentos Anuais

Reajust. / Estrat.	M(1)	M(2)	M(3)	M(4)	M(5)	M(6)	M(7)	Matur	M-Bullet	M-Barbell
I	783,3	921,3	882,4	900,3	895,4	866,1	858,0	681,5	824,4	802,9
II	379,4	515,7	488,0	468,6	450,1	432,0	428,3	303,4	424,4	393,7
III	121,6	227,8	220,1	210,1	192,5	189,2	186,9	87,2	157,6	152,3
Liq.	102,7	28,2	26,4	28,5	47,3	30,8	37,1	107,3	65,1	82,8
TOTAL	442,4	540,2	516,2	518,4	510,8	493,3	488,8	379,4	471,4	455,4

B – Reajustamentos Semestrais

Reajust. / Estrat.	M(1)	M(2)	M(3)	M(4)	M(5)	M(6)	M(7)	Matur	M-Bullet	M-Barbell
I	1.072,5	1.167,3	1.157,0	1.180,8	1.179,3	1.168,0	1.186,6	948,7	1.106,4	1.119,0
II	729,6	845,0	824,5	839,1	840,4	835,3	832,3	650,0	770,5	756,9
III	523,0	634,9	609,2	607,2	598,1	599,8	595,9	452,7	561,9	539,3
IV	333,3	447,5	428,2	412,7	393,4	398,4	393,1	281,7	365,2	347,8
V	209,2	312,4	301,2	288,0	266,3	271,8	266,5	171,5	237,2	225,0
VI	99,3	187,9	183,2	176,1	157,5	162,6	157,3	76,9	127,8	120,6
VII	27,9	78,6	77,0	75,1	64,6	68,0	65,2	30,6	34,1	33,3
Liq.	93,1	36,2	35,7	40,3	52,7	51,0	71,7	109,1	70,2	78,9
TOTAL	516,0	593,7	581,4	587,2	582,3	579,6	582,6	454,8	541,5	537,3

Notas: O valor TOTAL é calculando considerando todas as observações registradas em cada um dos momentos de reajustamento da carteira. A unidade de medida é o ponto base.

ANEXO 8B: Volatilidade (Medida pelo RFRM) das Estratégias ao Longo do HTI

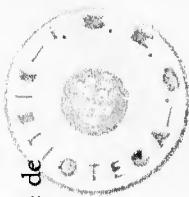
A – Reajustamentos Anuais

Reajust. / Estrat	M(1)	M(2)	M(3)	M(4)	M(5)	M(6)	M(7)	Matur	M-Bullet	M-Barbell
I	524,6	504,4	507,9	559,8	556,7	516,2	507,5	438,6	546,5	498,0
II	114,9	48,7	30,2	68,4	101,6	39,8	36,4	51,1	136,8	62,4
III	32,3	0,0	0,0	9,6	31,9	0,0	0,0	1,5	28,9	6,3
Liq.	102,7	26,0	24,1	28,2	47,3	27,0	29,3	107,1	65,1	82,5
TOTAL	273,9	253,7	254,7	282,4	284,4	259,2	254,8	227,2	283,9	254,3

B – Reajustamentos Semestrais

Reajust. / Estrat	M(1)	M(2)	M(3)	M(4)	M(5)	M(6)	M(7)	Matur	M-Bullet	M-Barbell
I	820,4	850,2	862,1	895,5	891,5	863,6	895,0	722,9	854,2	853,5
II	505,0	502,9	506,3	547,9	563,0	537,7	543,7	434,0	527,1	511,9
III	270,3	242,0	231,8	270,2	293,2	278,6	277,6	215,8	274,7	265,2
IV	85,3	51,5	36,5	56,0	76,4	73,0	71,2	52,8	75,5	71,5
V	16,8	0,0	0,0	2,6	9,2	6,3	12,3	0,0	0,5	3,3
VI	13,4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,1	2,7	7,7
VII	24,9	3,3	1,4	11,1	14,0	1,7	7,4	25,3	3,7	18,9
Liq.	93,1	33,0	30,9	38,3	52,2	49,9	68,5	109,1	70,2	78,4
TOTAL	356,8	360,2	363,2	384,0	388,3	374,2	384,7	310,8	369,8	366,1

Notas: O valor TOTAL é calculando considerando todas as observações registradas em cada um dos momentos de reajustamento da carteira. A unidade de medida é o ponto base.



ANEXO 9 - Rendibilidade Relativa (Medida pelo Desvio Médio Face à TRE) das Estratégias ao Longo do HTI

A – Reajustamentos Anuais

Reajust. / Estrat	M(1)	M(2)	M(3)	M(4)	M(5)	M(6)	M(7)	Matur	M-Bullet	M-Barbell
I	39	214	159	97	99	132	148	58	52	89
II	208	381	371	323	290	313	318	206	242	267
III	78	204	206	186	161	176	176	78	121	132
Liq	-99	-11	-9	-18	-33	-17	-14	-90	-58	-71
TOTAL	57	197	182	147	129	151	157	63	89	104

B – Reajustamentos Semestrais

Reajust. / Estrat	M(1)	M(2)	M(3)	M(4)	M(5)	M(6)	M(7)	Matur	M-Bullet	M-Barbell
I	-79	16	-40	-92	-83	-28	-48	-65	-85	-74
II	18	144	111	55	39	79	71	40	32	40
III	159	292	278	229	197	221	220	162	193	183
IV	195	323	320	283	249	262	259	191	234	225
V	155	267	269	244	214	222	218	151	194	185
VI	75	168	172	158	135	141	137	69	110	104
VII	-9	67	72	64	48	56	54	-9	27	15
Liq	-89	-24	-20	-29	-44	-37	-40	-94	-64	-65
TOTAL	53	157	145	114	94	115	109	56	80	77

Notas: O valor TOTAL é calculado considerando todas as observações registradas em cada um dos momentos de reajustamento da carteira. A unidade de medida é o ponto base.



ISEG
ECONÓMICAS



9600245939

